HOOFDSTUK 1

BASISBEGRIPPEN

1.1. Het begrip kracht

1.1.1. Definitie van kracht

Een stoffelijk punt is een punt waaraan een zekere massa toegekend wordt. Dit punt is meestal de voorstellende van een lichaam. Zo zal men in de studie van de beweging van de aarde in het heelal de aarde voorstellen door een punt met als massa de massa van de aarde.

Een stoffelijk lichaam (meestal spreekt men verkort van een lichaam) is een samenstel van stoffelijke punten.

De definitie van kracht volgt rechtstreeks uit de eerste bewegingswet van Newton die luidt : "Als er geen kracht op een lichaam werkt, beweegt het lichaam zich voort in een rechte lijn met een constante snelheid v." (deze constante snelheid heeft voor bouwwerken op aarde de waarde v = 0). Met andere woorden : een lichaam kan uit zichzelf zijn toestand van rust of beweging niet veranderen. Daarvoor is een uitwendige oorzaak nodig.

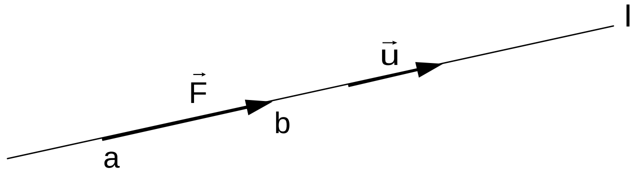
In de fysica wordt een kracht derhalve gedefinieerd als elke uitwendige oorzaak die de rust- of bewegingstoestand van een lichaam wijzigt.

Een kracht kan echter slechts waargenomen worden door haar uitwerking. Deze uitwerking kan een bewegingstoestandsverandering zijn (dynamisch), of een vormverandering (statisch) van het lichaam waarop de kracht werkt.

1.1.2. Voorstelling van kracht

Een kracht heeft een bepaalde *grootte* en werkt op een lichaam volgens een bepaalde *richting* en *zin*. Een kracht is dus een vectoriële grootheid, een grootheid die gekenmerkt wordt door zowel een grootte, een richting en een zin.

Een kracht wordt als vector grafisch voorgesteld door een pijl, en aangeduid door een hoofdletter met een pijltje erboven : $\vec{F}$. Wanneer verder gesproken wordt over de kracht $\vec{F}$ bedoelen dan we evengoed de kracht als haar vectoriële voorstelling.



De richting van de kracht wordt gegeven door de drager of werklijn l. De zin wordt aangegeven door de punt van de pijl op de werklijn of door de notatie $\overrightarrow{ab}$, d.w.z. van a naar b. De grootte van de kracht wordt aangegeven ofwel (grafisch) door de lengte van de pijl, dus de lengte van het lijnstuk ab, op een bepaalde schaal getekend, ofwel (analytisch) door de numerieke waarde van de grootte te noteren bij een (niet op schaal getekende) pijl.

Om een kracht als vector te kunnen uitzetten wordt gebruik gemaakt van de éénheids-vector $\vec{u}$. Dit is een vector die als grootte heeft de eenheid van kracht, en verder dezelfde kenmerken heeft als de vector $\vec{F}$ zelf, te weten dezelfde richting, en dezelfde (of tegengestelde) zin. Daaruit volgt : $\vec{F} = F.\vec{u}$. F duidt dan het aantal maal aan dat $\vec{u}$ op de werklijn moet uitgezet worden om de vector $\vec{F}$ te bekomen. F wordt het kengetal van $\vec{F}$ genoemd. De kracht heeft een grootte +F wanneer $\vec{F}$ en $\vec{u}$ dezelfde zin hebben; de kracht heeft een grootte -F wanneer $\vec{F}$ en $\vec{u}$ een tegengestelde zin hebben.

Andere voorbeelden van vectoriële grootheden zijn : verplaatsing, snelheid, versnelling; deze grootheden bezitten immers een grootte, richting en zin.

Tegenover vectoriële grootheden staan scalaire grootheden. Een scalar wordt enkel en alleen gekenmerkt door zijn grootte, vb temperatuur, volume, massa.

Om practische en didactische redenen zullen in onderhavige cursus krachten F alleen dan als vectoren $\vec{F}$, dus met het pijltje boven het kengetal, worden voorgesteld in zoverre dit nodig is om verwarring te voorkomen. In die gevallen waar uit de context duidelijk is dat met de kracht F wel degelijk de vector $\vec{F}$ wordt bedoeld, zal het pijltje boven F kunnen weggelaten worden.

1.1.3. Verband tussen kracht en versnelling

Hiervoor baseren we ons op de tweede bewegingswet van Newton : "De versnelling, die een lichaam ondergaat, is recht evenredig met de aangrijpende kracht, en geschiedt volgens de richting en zin van de kracht."

Hieruit volgt dat, wanneer een kracht met grootte F aan een lichaam met massa m een versnelling a geeft, volgende betrekking tussen deze grootheden bestaat :

$$F = m.a \tag{1.1}$$

De massa m van een lichaam geen vectoriële grootheid, maar een scalaire grootheid. Wiskundig gezien is m in deze vergelijking een evenredigheidsfactor, een richtings-coëfficiënt. Fysisch gezien is de massa m een hoeveelheid materie. De massa is onafhankelijk van de plaats waar het lichaam zich bevindt.

In vectoriële voorstelling wordt de vergelijking (1.1) :

$$\vec{F} = m.\vec{a} \tag{1.2}$$

De voornaamste kracht waarmee we rekening dienen te houden is de zwaartekracht. Dit is de kracht die door de aarde op alle lichamen wordt uitgeoefend, dus de kracht waarmee alle lichamen door de aarde worden aangetrokken. Een lichaam met massa m bekomt dus een zwaartekrachtsversnelling g tengevolge van de zwaartekracht G, waarvan de grootte gegeven wordt door :

$$G = m.g \qquad (1.5)$$

G noemt men het gewicht van dat lichaam, en voor deze vectoriële kracht geldt dan ook :

$$\vec{G} = m.\vec{g} \qquad (1.6)$$

1.1.4. Eenheid van kracht

De eenheid van kracht volgt uit de eenheid van massa, de eenheid van lengte en de eenheid van tijd. De eenheid van kracht geeft aan een lichaam met een massa van 1 kg een versnelling van 1 m/s². De eenheid van kracht wordt Newton genoemd en wordt aangeduid door N. Dus :

$$1\ N = \frac{1\ kg\ .\ 1\ m}{1\ s^2} = 1\ kg\ m/s^2 \qquad (1.7)$$

Veelvouden van N zijn : kilonewton kN = 1000 N, en meganewton MN = 1000000 N.

Wanneer dit wordt toegepast op het gewicht van een lichaam, moet ermee rekening gehouden worden dat de zwaartekrachtsversnelling g varieert volgens de plaats op aarde. Aangezien de aarde aan de polen lichtjes is afgeplat, is de aantrekkingskracht die de aarde op een lichaam uitoefent aan de polen immers iets groter dan aan de evenaar. Deze verschillen zijn klein; de waarde van g bedraagt :

aan de evenaar	: 9,79 m/s²
aan de polen	: 9,83 m/s²
in onze streken	: 9,81 m/s²

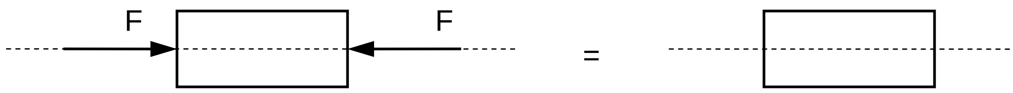
Hieruit volgt dat bij een waarde van g = 9,81 m/s² een massa van 1 kg door de aarde wordt aangetrokken met een kracht van 9,81 N. Immers :

$$G = m.g = 1\ kg \times 9{,}81\ m/s^2 = 9{,}81\ kg\ m/s^2 = 9{,}81\ N. \qquad (1.8)$$

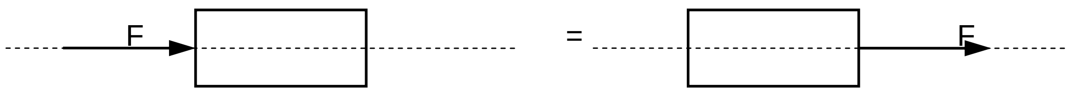
Als voldoende nauwkeurig wordt in de bouwwereld deze waarde van 9,81 N gebracht op 10 N, zodat praktisch gezien wordt aangenomen dat een massa van 1 kg wordt aangetrokken door een kracht van 10 N.

1.1.5. Vaststellingen

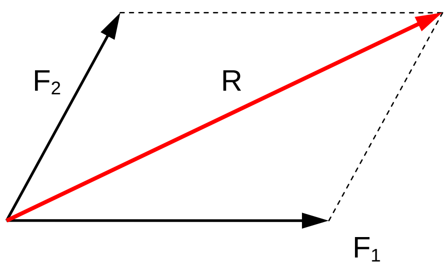
1) Twee krachten met dezelfde grootte en op dezelfde werklijn, maar met tegengestelde zin, heffen, m.b.t. de bewegingstoestand van een lichaam, elkaars werking op. De bewegingstoestand van een lichaam verandert dus niet, wanneer dergelijke twee krachten worden ingevoerd. Dit volgt rechtstreeks uit de eerste bewegingswet van Newton



2) Een kracht mag volgens haar werklijn verplaatst worden, zonder dat de bewegings-toestand van een lichaam daardoor verandert.



3) De bewegingstoestand van een lichaam verandert niet wanneer twee krachten, aangrijpend in hetzelfde punt, vervangen worden door hun resultante, zijnde de kracht geconstrueerd op de diagonaal van het parallellogram met de twee krachten als zijden. Deze resultante R heeft dus, m.b.t. de bewegingstoestand van een lichaam, dezelfde werking als de twee krachten samen.



1.1.6. Derde wet van Newton : actie = reactie

Indien de lichamen A en B in rust zijn, geldt dat, indien lichaam A op lichaam B een kracht F_A uitoefent, lichaam B op lichaam A een even grote kracht F_B zal uitoefenen, die echter tegengesteld van zin is.

Dus : $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$ en ook : $F_A = F_B$ (1.9)

De wet "actie = reactie" zal zeer veel gebruikt worden bij de behandeling van evenwichtsvraagstukken en heeft dus een groot belang.

1.2. De voornaamste bewerkingen met vectoren

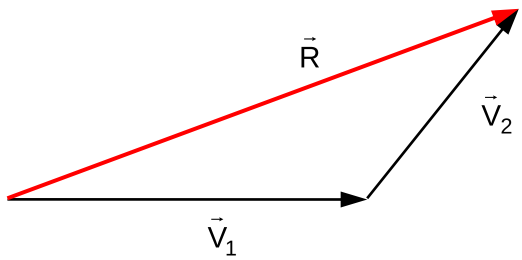
Aangezien krachten vectoriële grootheden zijn, is het aangewezen, voorafgaandelijk aan de bewerkingen met krachten, de voornaamste bewerkingen met vectoren te behandelen.

Er zijn 3 soorten vectoren :

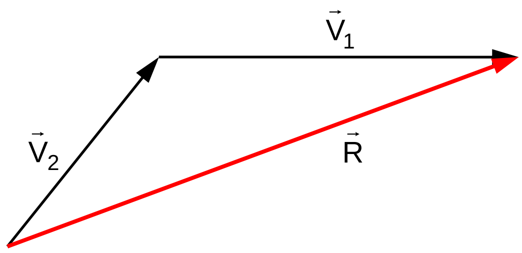
- glijdende vectoren : vectoren die vrij mogen verplaatst worden langs hun werklijn, vb een kracht
- vrije vectoren : vectoren met oorsprong vrij in de ruimte; deze vectoren mogen evenwijdig met zichzelf verplaatst worden, vb een koppelas
- gebonden vectoren : vectoren met vaste oorsprong

1.2.1. Som van twee vectoren

Om de som te maken van twee vectoren $\vec{V}_1$ en $\vec{V}_2$ plaatst men deze twee vectoren na elkaar zodanig dat het beginpunt van de tweede vector samenvalt met het eindpunt van de eerste. De som is dan per definitie de vector $\vec{R}$ met als beginpunt het beginpunt van de eerste vector en als eindpunt het eindpunt van de tweede vector : $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{R}$.



Het blijkt onmiddellijk dat de volgorde waarin men de vectoren na elkaar uitzet geen belang heeft. De volgende constructie geeft immers precies dezelfde som $\vec{R}$.



Immers, de twee driehoeken, bekomen bij bepalen van de som bij verschillende volgorde, vormen samen een parallellogram waarvan de diagonaal de som voorstelt. Men kan dus de som van twee vectoren maken met behulp van een driehoek of met behulp van een parallellogram. Zie ook vaststelling 3 in art. 1.1.5.3.

Aangezien de volgorde waarin men de vectoren na elkaar uitzet geen belang heeft is de som van twee vectoren *commutatief*. Er geldt dus :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1 = \vec{R} \tag{1.10}$$

Opgemerkt dient te worden dat de numerieke waarde van de som van twee vectoren meestal niet gelijk is aan de som van de numerieke waarden van de twee vectoren. Voor twee vectoren op dezelfde werklijn is dit wel het geval.

1.2.2. Som van meerdere vectoren

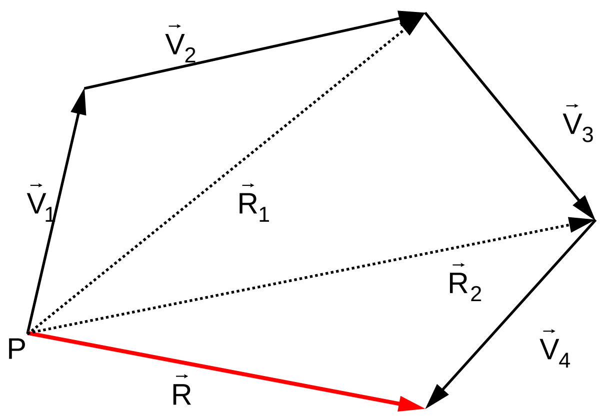
Om de som te maken van de vectoren $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ en $\vec{V}_4$ plaatst men deze vectoren na elkaar zodanig dat het beginpunt van een vector samenvalt met het eindpunt van de vorige vector. De som is dan de vector $\vec{R}$ met als beginpunt het beginpunt van de eerste vector en als eindpunt het eindpunt van de laatste vector.

Immers, op deze wijze bepaalt men opeenvolgend de resultante van twee vectoren (zie art. 1.2.1.) :

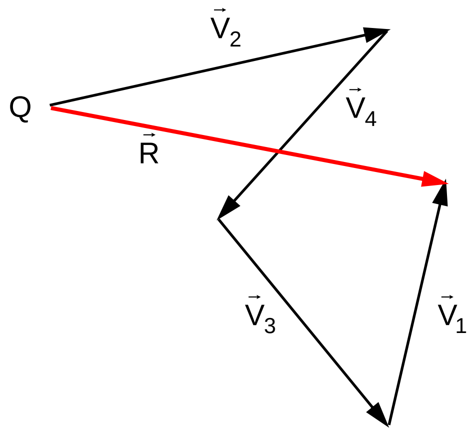
$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{R}_1$$

$$\vec{R}_1 + \vec{V}_3 = \vec{R}_2 = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$$

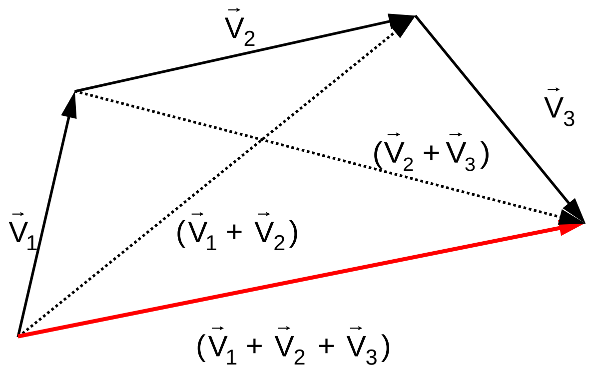
$$\vec{R}_2 + \vec{V}_4 = \vec{R} = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3) + \vec{V}_4 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 \qquad (1.11)$$



Aangezien voor de som van twee vectoren geldt dat de volgorde waarin men de vectoren na elkaar uitzet geen belang heeft, is dit ook voor de som van meerdere vectoren het geval. De volgende constructie, met volgorde van bijvoorbeeld $\vec{V}_2$ (met beginpunt Q), $\vec{V}_4, \vec{V}_3$ en $\vec{V}_1$, geeft immers precies dezelfde som $\vec{R}$. De som van meerdere vectoren is dus, zoals de som van twee vectoren, *commutatief.*



De som van meerdere vectoren is ook *associatief.*



$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \qquad (1.12)$$

De haakjes mogen dus weggelaten worden in bovenstaande vergelijking.

1.2.3. Product van een vector met een reëel getal

Het product van een vector $\vec{V}_1$ met een reëel getal n is een vector $\vec{V}_2$ met volgende kenmerken :

- de grootte (het kengetal) van $\vec{V}_2$ is n maal de grootte van $\vec{V}_1$, dus : $V_2 = nV_1$.
- de richting van $\vec{V}_2$ is dezelfde als de richting van $\vec{V}_1$
- de zin van $\vec{V}_2$ hangt af van het teken van n :
  - als n positief is, is de zin van $\vec{V}_2$ dezelfde als de zin van $\vec{V}_1$
  - als n negatief is, is de zin van $\vec{V}_2$ tegengesteld aan de zin van $\vec{V}_1$

Voor het overige geldt :

- voor een willekeurige vector $\vec{V}$: $n\,(m\vec{V}) = (n\,m)\vec{V} = n\,m\vec{V}$

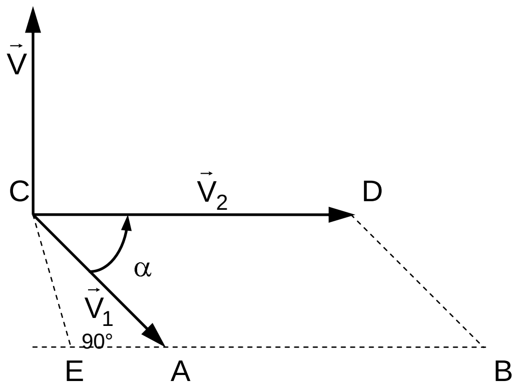
  $(n + m)\vec{V} = n\vec{V} + m\vec{V}$
- voor 2 willekeurige vectoren $\vec{V}_1$ en $\vec{V}_2$: $n\,(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = n\vec{V}_1 + n\vec{V}_2$

1.2.4. Vectorieel product

Het vectorieel product van 2 vectoren $\vec{V}_1$ en $\vec{V}_2$ is een vector $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ met volgende kenmerken :

- de grootte van $\vec{V}$: $V = V_1 V_2 \sin\alpha$, met α de hoek tussen de vectoren $\vec{V}_1$ en $\vec{V}_2$.

  $V = (V_1 \sin\alpha)\, V_2 = CE\,.\,V_2 =$ oppervlakte van parallellogram ABCD.
- de richting van $\vec{V}$: de vector $\vec{V}$ staat loodrecht op het vlak van $\vec{V}_1$ en $\vec{V}_2$.
- de zin van $\vec{V}$: als de hoek α positief georiënteerd is van $\vec{V}_1$ naar $\vec{V}_2$ toe, is de vector $\vec{V}$ positief.



Voor het overige geldt, voor willekeurige vectoren $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ en $\vec{V}_3$:

1) $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\,\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$, omdat voor $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ de hoek α positief is (georiënteerd van $\vec{V}_1$ naar $\vec{V}_2$ toe), en voor $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$ de hoek α negatief is (georiënteerd van $\vec{V}_2$ naar $\vec{V}_1$ toe), en $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

2) $(n\vec{V}_1) \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \wedge (n\vec{V}_2) = n(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$

3) $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$

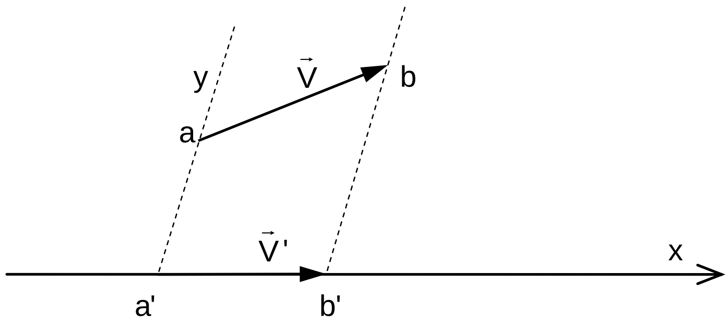
4) $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_1 = \vec{0}$; immers $V_1 V_1 \sin 0° = 0$.

1.2.5. De projectiemethode van vectoren

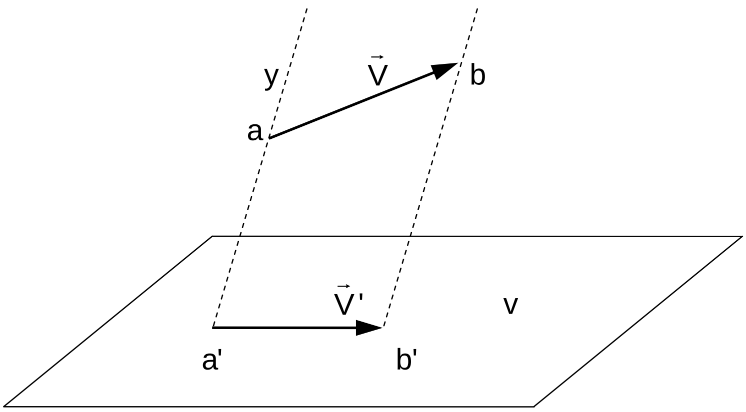
De projectie van vector $\vec{V}$ is een vector $\vec{V}'$, waarvan het beginpunt de projectie van het beginpunt van vector $\vec{V}$ is, en het eindpunt de projectie van het eindpunt van vector $\vec{V}$.

Men projecteert een vector op een as of op een vlak. De projectie van een vector $\vec{V}$ ligt in hetzelfde vlak als vector $\vec{V}$.

- Projectie volgens richting y op een as x : $p_X^Y(\vec{V}) = \vec{V}'$



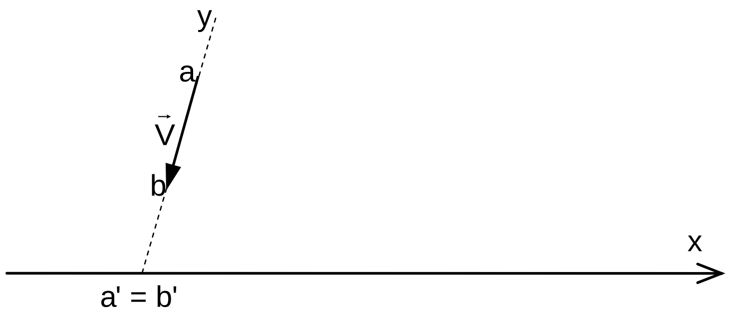
- Projectie volgens richting y op een vlak v : $p_v^Y(\vec{V}) = \vec{V}'$



Bij de projectie van een vector loodrecht op een as of op een vlak, spreekt van een *orthogonale projectie.*

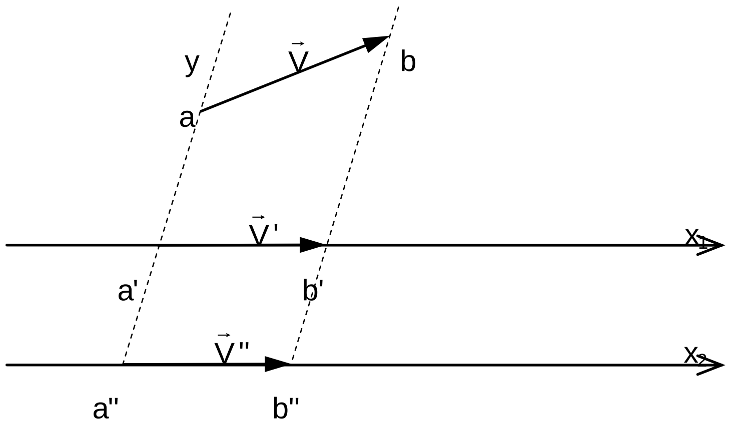
1.2.6. Eigenschappen van projecties van vectoren

1) De projectie van een vector volgens zijn werklijn, op een as of een vlak, is gelijk aan nul.



$p_X^Y(\vec{V}) = \vec{0}$, immers $\overrightarrow{a'b'} = \overrightarrow{a'a'} = \vec{0}$

2) Een vector heeft op evenwijdige projectie-assen, of evenwijdige projectievlakken, dezelfde projectie.



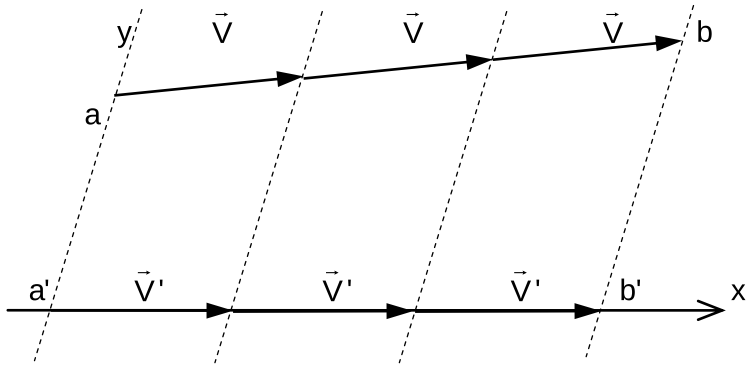
Als x_1 // x_2, is $p_{X_1}^Y(\vec{V}) = p_{X_2}^Y(\vec{V})$

$\vec{V}' = \vec{V}''$

3) Gelijke vectoren hebben gelijke projecties.

Als $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$, is $p(\vec{V}_1) = p(\vec{V}_2)$

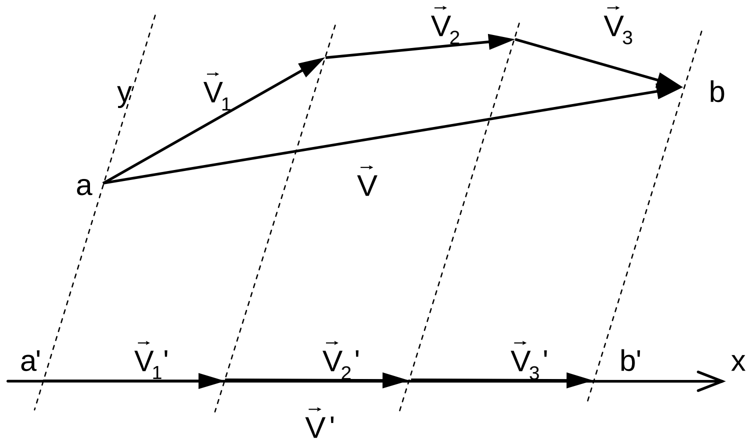
4) De projectie van het product van een vector met een reëel getal is gelijk aan het product van dat getal met de projectie van die vector.



$\vec{ab} = n\vec{V}$

$\vec{a'b'} = p(n\vec{V}) = n\, p(\vec{V}) = n\, \vec{V}'$

5) De projectie van de som van vectoren is gelijk aan de som van de projecties van die vectoren ; ook het omgekeerde is het geval.



$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + ... + \vec{V}_n$

$p(\vec{V}) = p(\vec{V}_1) + p(\vec{V}_2) + p(\vec{V}_3) + ... + p(\vec{V}_n)$

$\vec{V}' = \vec{V}_1' + \vec{V}_2' + \vec{V}_3' + ... + \vec{V}_n'$