HOOFDSTUK 3

MOMENT VAN EEN KRACHT

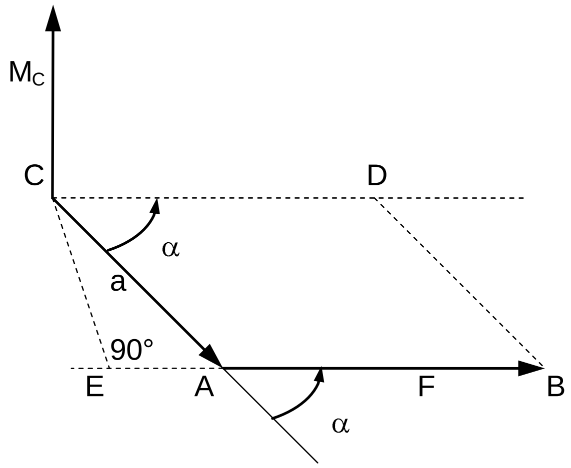
KOPPEL VAN KRACHTEN

De kennis van het moment van een kracht is nodig voor het herleiden van een kracht en een krachtenstelsel, voor het (analytisch) samenstellen van niet-snijdende krachten en het (analytisch) ontbinden van een kracht in niet-snijdende componenten, evenals bij het uitwendig evenwicht van krachten, en voor het bepalen van reactiekrachten en reactiemomenten.

3.1. Moment van een kracht omheen een punt

Het moment M_C van een kracht F omheen een punt C is het vectorieel product van de afstand van het punt tot de kracht, en de kracht. M_C is dus een vectoriële grootheid.

Dus : $$\vec{M}_C(F) = \vec{a} \wedge \vec{F} \qquad (3.1)$$



Het aangrijpingspunt A van $\vec{F}$ speelt voor $\vec{M}_C(F)$ geen rol, vermits $\vec{F}$ een glijdende vector is en dus mag verplaatst langsheen haar werklijn. Immers, voor elk punt op de werklijn van de kracht F (bijvoorbeeld het eindpunt B van F) geldt :

$$\vec{CA} = \vec{CB} + \vec{BA} \qquad \text{zodat} \qquad \vec{CA} \wedge \vec{F} = \vec{CB} \wedge \vec{F} + \vec{BA} \wedge \vec{F}$$

en vermits $\vec{BA}$ op dezelfde werklijn ligt als $\vec{F}$ is $\vec{BA} \wedge \vec{F} = 0$, dus : $\vec{CA} \wedge \vec{F} = \vec{CB} \wedge \vec{F}$. Men kan dus $\vec{a}$ practisch gezien steeds als de loodrechte afstand van punt C tot de werklijn van de kracht F beschouwen.

De momentvector $M_C(F)$ heeft volgende kenmerken :

- grootte : met α de hoek tussen beide vectoren a en F :

  $$M_C(F) = a \,.\, F \,.\, \sin \alpha. \qquad (3.2)$$

  Dit kan geschreven worden als : $M_C(F) = F\,(a.\,\sin\alpha)$, waarbij $(a.\,\sin\alpha)$ de loodrechte afstand CE is van de werklijn van kracht F tot punt C.

  Dus zowel voor de momentvector als voor de grootte van het moment geldt : het moment van een kracht F omheen een punt C is het product van de loodrechte afstand van het punt C tot de werklijn van de kracht, met de kracht.

  Een maat voor de grootte van het moment van een kracht F ten opzichte van een punt C is dan ook de oppervlakte van parallellogram ABCD.

  De loodrechte afstand van het punt C tot de werklijn van de kracht F noemt men de krachtarm, of kortweg de arm, zodat voor de grootte van het moment geldt :

  $$\boxed{\text{moment} = \text{kracht} \times \text{arm}} \qquad (3.3)$$

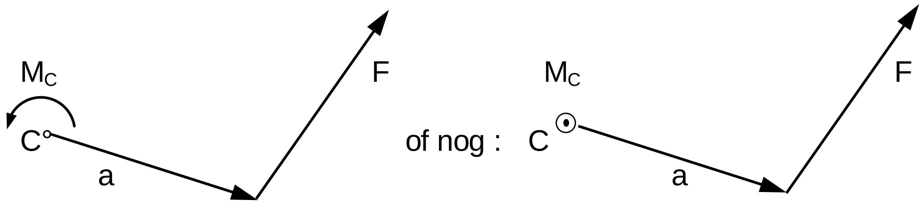
  De eenheid waarin de grootte van een moment wordt uitgedrukt is Nm, of kNm, of Nmm ...

- richting : de momentvector staat loodrecht op het vlak gevormd door de beide vectoren $\vec{a}$ en $\vec{F}$. Of de pijl van de momentvector naar boven of naar onder wijst wordt veelal aangeduid door de rechterhandregel, waarbij de duim de pijl aangeeft, en de gekromde vingers de rotatie van de kracht omheen het punt aangeven.

- zin : deze wordt conventioneel vastgelegd, waarbij elke conventie gelijkwaardig is; eenmaal een bepaalde conventie aangenomen, dient men die bij het oplossen van een vraagstuk van begin tot einde aan te houden; we zullen in deze cursus een moment (en een koppel, zie art. 3.4) positief rekenen, als het een linksdraaiende rotatiebeweging veroorzaakt (gezien vanuit de pijlpunt).

Uit de bepaling van de momentvector volgt dat het moment van een kracht om een punt gelijk is aan nul wanneer de kracht door het punt gaat.

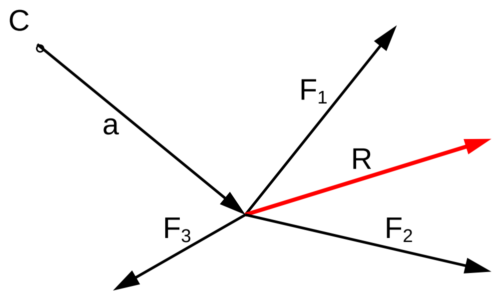
Wordt de momentvector in bovenaanzicht getoond, dan is de projectie van de momentvector een punt en wordt de momentvector aangeduid door een gebogen pijl waarvan de pijlpunt de zin aangeeft volgens dewelke het moment werkt, of door een cirkeltje met een punt.



3.3. Moment van de resultante van snijdende krachten - momentenstelling van Varignon : moment van de resultante van snijdende krachten omheen een punt

Is R de resultante van een aantal snijdende krachten F_1, F_2, F_3, ..., dan is :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = \Sigma \vec{F}_i$$



Het moment van deze resultante R omheen het punt C is :

$$\vec{M}_C(R) = \vec{a} \wedge \vec{R} = \vec{a} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots)$$

$$= \vec{a} \wedge \vec{F}_1 + \vec{a} \wedge \vec{F}_2 + \vec{a} \wedge \vec{F}_3 + \ldots \qquad (3.11)$$

Het vectorieel product $\vec{a} \wedge \vec{F}_i$ is het moment van de beschouwde kracht F_i omheen het punt C, waaruit volgt :

$$\vec{M}_C(R) = \vec{M}_C(F_1) + \vec{M}_C(F_2) + \vec{M}_C(F_3) + \ldots$$

$$= \Sigma \vec{M}_C(F_i) \qquad (3.12)$$

Dus luidt de momentenstelling van Varignon :

Het moment van de resultante van een aantal snijdende krachten omheen een punt is gelijk aan de vectoriële som van de momenten van deze krachten omheen datzelfde punt.

Voor de projectie-componenten X, Y en Z van een kracht F bekomen we, met

$$\vec{F} = \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z}$$

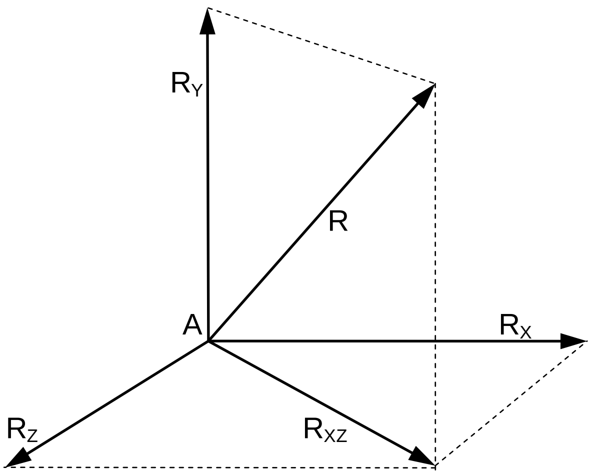
dus ook :

$$\vec{M}_C(F) = \vec{M}_C(X) + \vec{M}_C(Y) + \vec{M}_C(Z) \qquad (3.13)$$

zodat geldt :

Het moment van een kracht omheen een punt is gelijk aan de vectoriële som van de momenten van de projectie-componenten van de kracht omheen datzelfde punt.

Passen we dit toe op de projectie-componenten R_X, R_Y, R_Z van de resultante R van een aantal snijdende krachten F_i.



Met : $\vec{R} = \vec{R}_X + \vec{R}_Y + \vec{R}_Z$

en : $\vec{F}_i = \vec{X}_i + \vec{Y}_i + \vec{Z}_i$

en : $R_X = \Sigma X_i \qquad R_Y = \Sigma Y_i \qquad R_Z = \Sigma Z_i$

is (zie 3.13) : $\vec{M}_C(R) = \vec{M}_C(R_X) + \vec{M}_C(R_Y) + \vec{M}_C(R_Z)$

en (zie 3.12) : $\vec{M}_C(R_X) = \Sigma \vec{M}_C(X_i)$

$\vec{M}_C(R_Y) = \Sigma \vec{M}_C(Y_i)$

$\vec{M}_C(R_Z) = \Sigma \vec{M}_C(Z_i)$ (3.14)

dus : $\vec{M}_C(R) = \Sigma \vec{M}_C(X_i) + \Sigma \vec{M}_C(Y_i) + \Sigma \vec{M}_C(Z_i)$ (3.15)

Vermits de projectie-componenten R_X en X_i , R_Y en Y_i , R_Z en Z_i , op dezelfde assen gelegen zijn (op resp. x-, y- of z-as), hebben de bijbehorende momentvectoren ook dezelfde werklijn, zodat ook voor de grootte geldt :

$M_C(R_X) = \Sigma M_C(X_i)$

$M_C(R_Y) = \Sigma M_C(Y_i)$

$M_C(R_Z) = \Sigma M_C(Z_i)$ (3.16)

3.4. Koppel van krachten

3.4.1. Bepaling

Onder een koppel van krachten verstaan we een stelsel van 2 evenwijdige krachten, met dezelfde grootte maar tegengestelde zin.

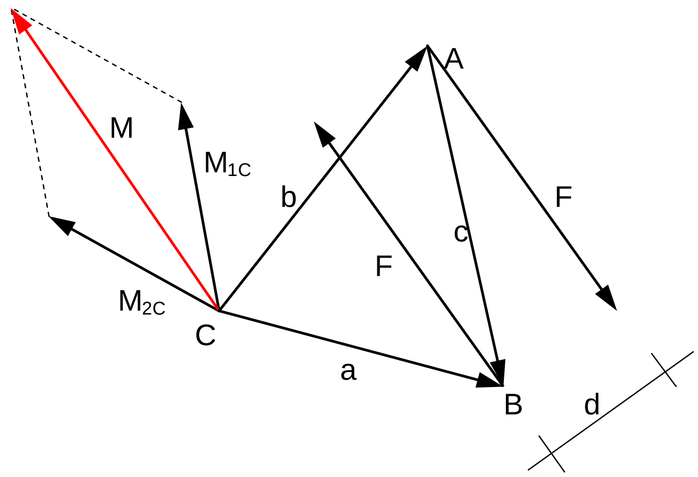
Hoewel de beide krachten gelijk van grootte en tegengesteld van zin zijn is er geen evenwicht, maar een rotatie. Een lichaam waarop (resulterend) een koppel werkt gaat dus roteren.

Het vlak waarin de 2 krachten gelegen zijn wordt het koppelvlak genoemd.

Het resulterend moment van de 2 krachten omheen een willekeurig punt noemt men het moment van het koppel, of de koppelas. Dit moment van een koppel stelt men meestal

voor door de letter M (soms ook door de letter K), en bij vectoriële voorstelling wordt die letter voorzien van een pijltje.

Vectoriële benadering :



$$\vec{M} = \vec{M}_C(F) + \vec{M}_C(-F) = \vec{a} \wedge \vec{F} + \vec{b} \wedge (-\vec{F}) = \vec{a} \wedge \vec{F} - \vec{b} \wedge \vec{F} = (\vec{a} - \vec{b}) \wedge \vec{F}$$

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \text{ of } \vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{M} = \vec{c} \wedge \vec{F}$$

De vector M is het resulterend moment van de 2 krachten F, en heeft dus de eigenschappen van een moment van een kracht omheen een punt. Uit dit vectorieel product blijkt :

- het moment van het koppel is onafhankelijk van de ligging van punt C, en is dus gelijk voor elk punt C.
- het moment van het koppel staat loodrecht op het koppelvlak.
- het moment van het koppel heeft een constante grootte die gegeven wordt door het product d.F, waarbij d de loodrechte afstand is tussen de beide krachten F van het koppel.

Voor de zin van het moment van het koppel geldt dezelfde conventie als voor het moment van een kracht.

Uit het voorgaande kunnen volgende eigenschappen afgeleid worden :

- Een koppel mag in zijn vlak willekeurig verplaatst worden zonder dat het moment van het koppel wijzigt : grootte, richting en zin blijven ongewijzigd.

- Een koppel mag verplaatst worden naar en in een vlak evenwijdig aan het koppelvlak, zonder dat het moment van het koppel wijzigt.
- Een gegeven koppelas (moment van een koppel) $\vec{M}$ is gelijkwaardig met een koppel (F, - F) gelegen in een vlak loodrecht op de koppelas, met dezelfde zin als $\vec{M}$ en waarvan de grootte d.F gelijk is aan de grootte M van de koppelas. Een koppel mag in zijn vlak dus vervangen worden door een ander koppel met andere waarden voor d en F, zolang het product d.F maar gelijk blijft.

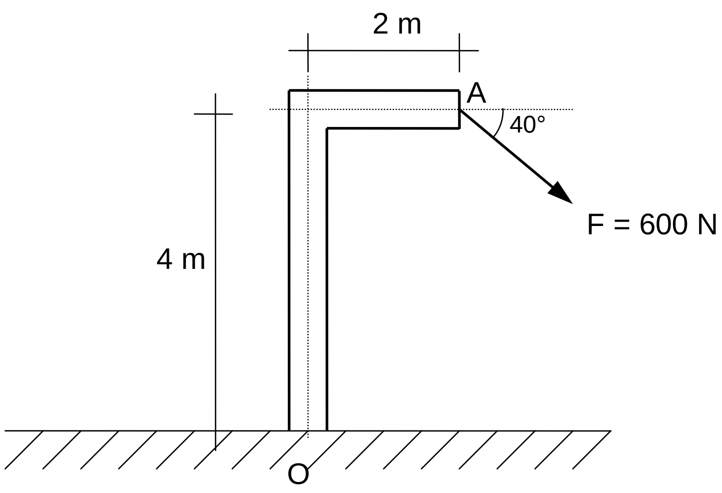
Opmerking :

In vele gevallen is het niet nodig het moment van een koppel voor te stellen als een vector, en hebben we voldoende aan de grootte en draaizin van dit moment van het koppel, en kunnen we eenvoudig stellen : M = d.F, waarbij d de loodrechte afstand is tussen de beide krachten F van het koppel.

3.5. Voorbeelden

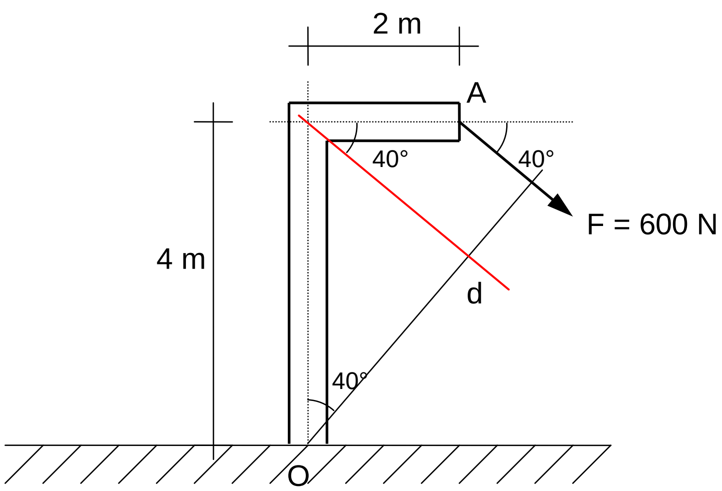
3.5.1. Voorbeeld 1 : betreffende momenten

Bepaal het moment van de in punt A aangrijpende kracht F = 600 N omheen punt O.



Er zijn meerdere oplossingswijzen :

1) De krachtarm van F is d, de loodrechte afstand van O tot de kracht F :



$$d = 4 \cos 40° + 2 \sin 40° = 4{,}35 \text{ m}$$

dus : $M_O = -\,600 \times 4{,}35 = -\,2610 \text{ Nm}$

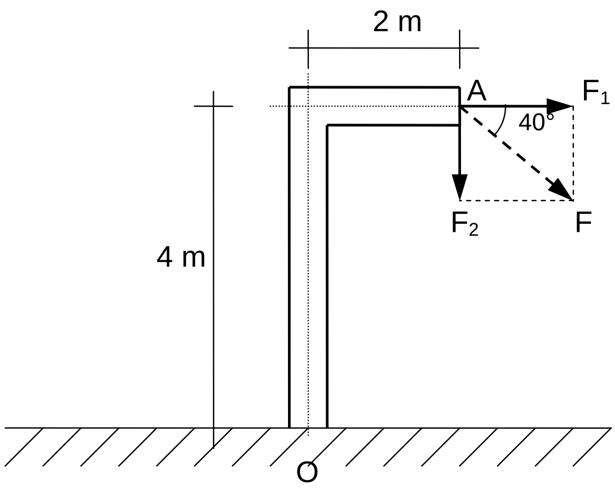
2) Vervang F door haar componenten F_1 (horizontaal) en F_2 (verticaal) in A :

$F_1 = 600 \cos 40° = 459{,}6$ N

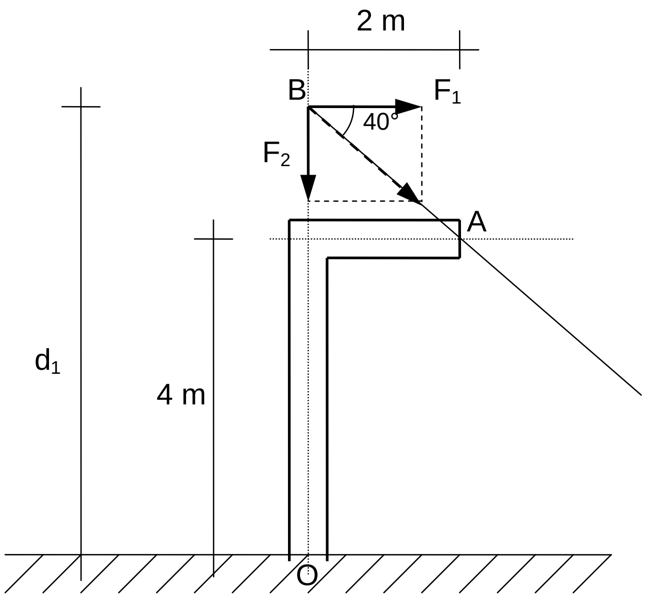
$F_2 = 600 \sin 40° = 385{,}7$ N

dus, met de momentenstelling van Varignon :

$M_O = - 459{,}6 \times 4 - 385{,}7 \times 2 = - 2610$ Nm



3) De kracht F mag verschoven worden over haar werklijn. Door verschuiving van F tot in punt B wordt het moment van component F_2 geëlimineerd.



De krachtarm d_1 van F_1 wordt :

$d_1 = 4 + 2 \text{ tg } 40° = 5{,}68$ m

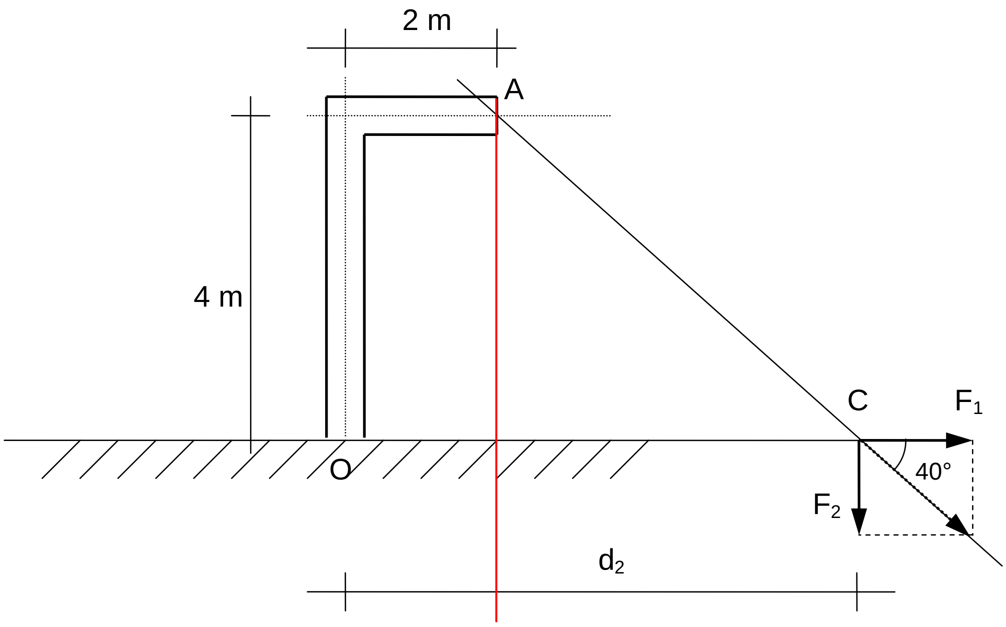
dus : $M_O = - 459{,}6 \times 5{,}68 = - 2610$ Nm

4) Analoog wordt door verschuiving van F tot in punt C het moment van component F_1 geëlimineerd.

De krachtarm d_2 van F_2 wordt :

$$d_2 = 2 + 4/\text{tg } 40° = 6{,}77 \text{ m}$$

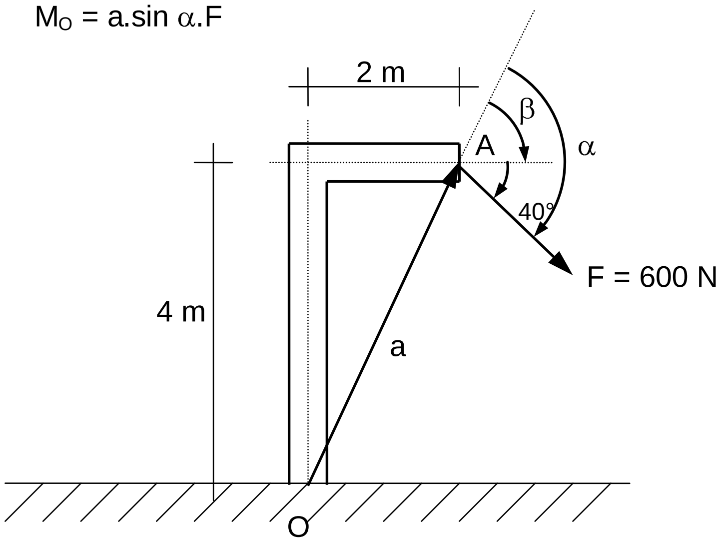
dus : $M_O = - 385{,}7 \times 6{,}77 = - 2610$ Nm



5) Uitgaande van M_O als vectoriële grootheid :

$$\vec{M}_O = \vec{a} \wedge \vec{F}$$

$$M_O = a.\sin \alpha.F$$



$\alpha = -(\beta + 40°)$

$\text{tg}\ \beta = \frac{4}{2} = 2$

$\beta = 63{,}43°$

zodat $\alpha = -103{,}43°$

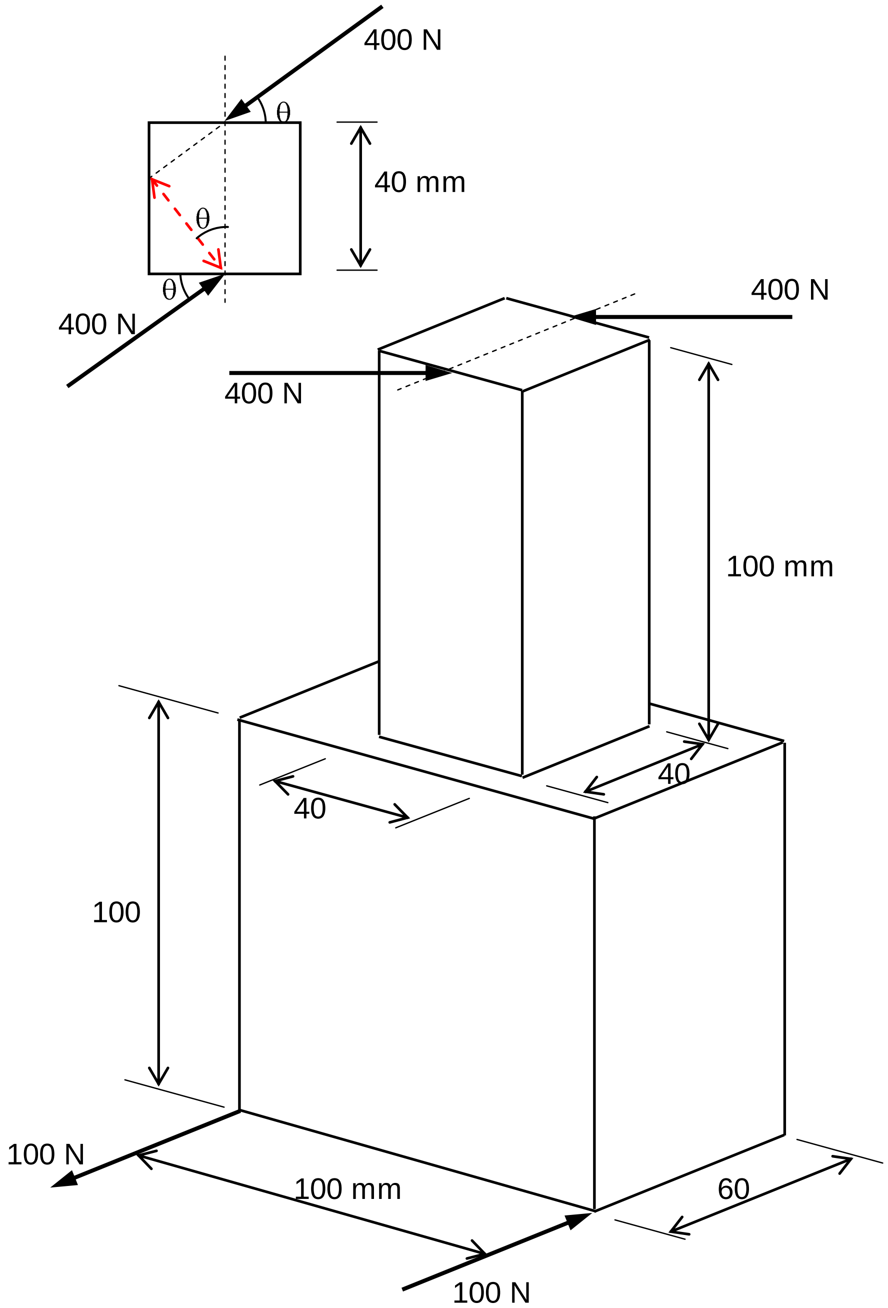
en $a = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4{,}47$ m

Dus $M_O = 4{,}47 \times \sin(-103{,}43°) \times 600 = -2610$ Nm

3.5.2. Voorbeeld 2 : betreffende koppels

Het voorgestelde element is onderaan onderworpen aan een koppel van krachten van 100 N.

Bepaal de hoek θ waaronder de 2 krachten F en - F, beiden 400 N groot, bovenaan op het element dienen in te werken om een gelijkwaardig vervangkoppel te vormen. Afmetingen in mm.



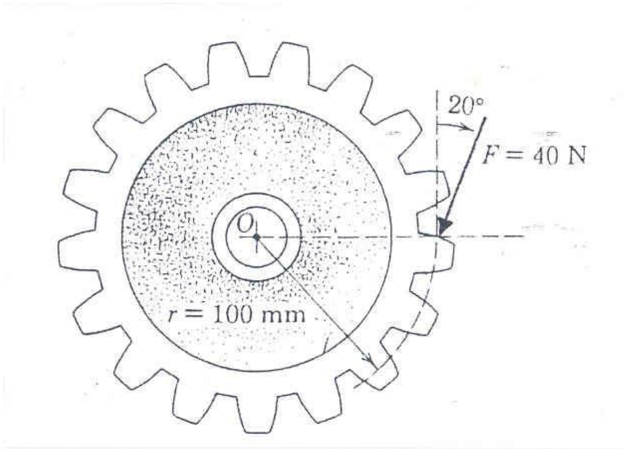
De grootte van het koppel (F, - F) dient gelijk te zijn aan die van het gegeven koppel,

dus : $400 \times 40 \cos\theta = 100 \times 100 = 10000 \text{ Nmm} = 10 \text{ Nm}$

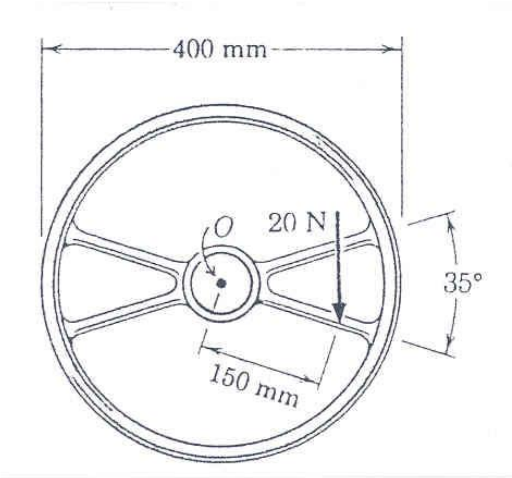
zodat : $\cos\theta = \dfrac{10000}{16000} = \dfrac{10}{16} = 0{,}625$ waaruit volgt : $\theta = 51{,}3°$

3.6. Opgaven

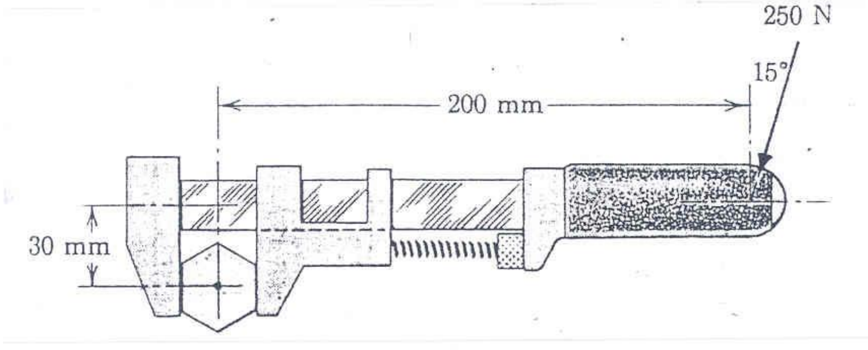
1. Een kracht F = 40 kN werkt op een tandwiel, zie figuur. Bepaal de grootte van het uitgeoefend moment omheen punt O.



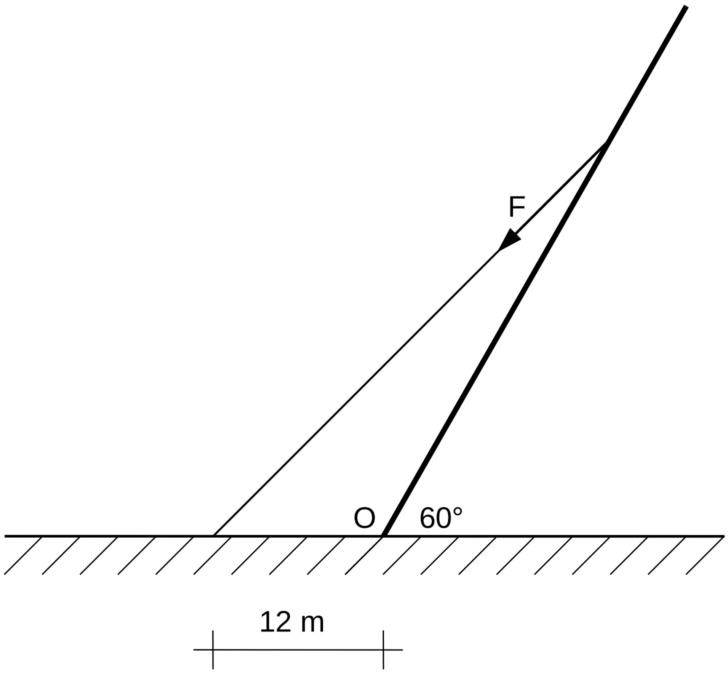
2. Een chauffeur oefent een kracht van 20 N uit op een spaak in het vlak van het stuurwiel zoals getoond. Bepaal het moment van deze kracht omheen het middelpunt van het stuurwiel.



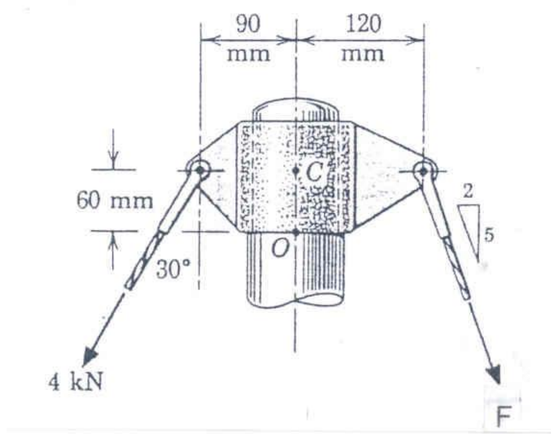
3. Bereken het moment dat door de kracht van 250 N, werkend op het handvat van de Engelse sleutel zoals getoond, uitgeoefend wordt omheen de langsas van de bout.



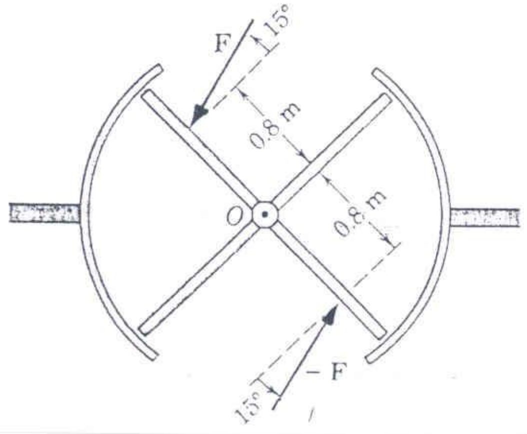
4. Bij het oprichten van een vlaggenmast vanuit de getoonde positie dient de kracht F in de kabel een moment van 72 kNm uit te oefenen omheen voetpunt O. De vlaggenmast is 40 m lang, de kabel is bevestigd in een punt op 10 m van de top. Bepaal kracht F.



5. Op een masttop werken 2 krachten, de ene met grootte 4 kN, de andere F. Bepaal de grootte van F zodanig dat omheen punt O geen resulterend moment werkt.



6. Twee personen oefenen tegelijk een even grote kracht F uit op een draaideur op de wijze zoals getoond. Als het resulterend moment van deze 2 krachten omheen de deurspil (O) 15 Nm is, welk is dan de grootte van de uitgeoefende krachten F?



7 Elk van de 2 schroeven van een zeeschip ontwikkelt bij volle kracht een stuwkracht van 300 kN. Bij een draaimaneuver stuwt de ene schroef volle kracht vooruit, en de andere volle kracht achteruit. Welke kracht dient elk van de 2 sleepboten uit te oefenen op het schip om het draai-effect van het scheepsschroeven te neutraliseren?