HOOFDSTUK 4

TRAAGHEIDSMOMENTEN

+ OPLOSSINGEN VAN OPGAVEN

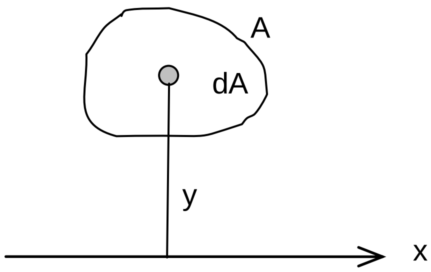
Traagheidsmomenten zijn niet weg te denken uit de sterkteleer of structuurleer. Ze komen voor in o.a. formules voor buigspanningen, weerstandsmomenten, alle formules voor vormverandering (doorbuiging, hellingshoek, …), en zijn dus onmisbaar bij het dimensioneren van structuurelementen.

1. Lijntraagheidsmoment

1.1. Definitie

Een <u>lijntraagheidsmoment</u> is een traagheidsmoment van een oppervlak A berekend omheen een as. Het lijntraagheidsmoment omheen een as x is dus :

$$\boxed{I_x = \int_A y^2 \, dA}$$



Uit de definitie volgt :

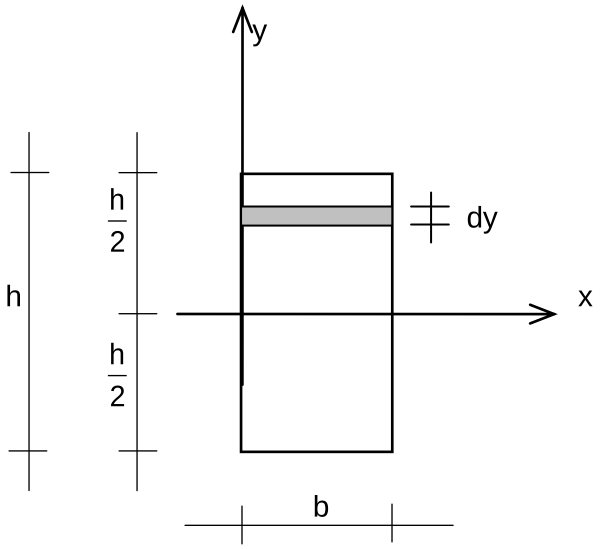
- Een traagheidsmoment is steeds positief (eenheid : lengte tot de 4-de macht).
- Het traagheidsmoment van een samengestelde doorsnede is de som van de traagheidsmomenten van de onderdelen.

Wanneer de x-as het zwaartepunt van het oppervlak bevat spreken we van het <u>eigen traagheidsmoment.</u>

1.2. Traagheidsmomenten van eenvoudige oppervlakken

1.2.1. Rechthoek : eigen traagheidsmoment (x-as gaat door het zwaartepunt)

$$I_x = \int_A y^2 \, dA \quad \text{met} \quad dA = b \, dy$$

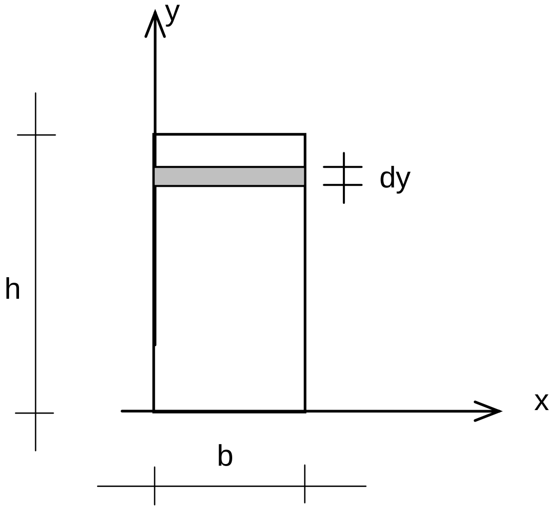


$$I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \, b \, dy = b \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right] = \frac{b}{3}\,\frac{h^3}{4}$$

$$\boxed{I_x = \frac{b\,h^3}{12}}$$

de plaats van de y-as heeft geen belang

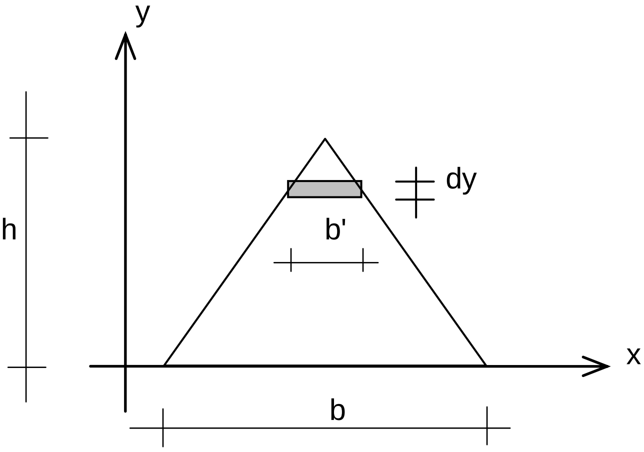
1.2.2. Rechthoek : traagheidsmoment t.o.v. de basis (x-as gaat door de basis)



$$I_x = \int_0^h y^2\, b\, dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = b\,\frac{h^3}{3}$$

$$\boxed{I_x = \frac{b\,h^3}{3}}$$

1.2.3. <u>Driehoek</u> : traagheidsmoment t.o.v. de basis : x-as gaat door de basis



$$\frac{b'}{b} = \frac{h-y}{h} = 1 - \frac{y}{h}$$

$$b' = b\,(1 - \frac{y}{h})$$

$$dA = b'\,dy = b\,(1 - \frac{y}{h})\,dy$$

$$I_x = \int_A y^2\, dA = \int_0^h y^2\, b\,(1 - \frac{y}{h})\,dy = b\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4\,h}\right]_0^h = b\left[\frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4\,h}\right]$$

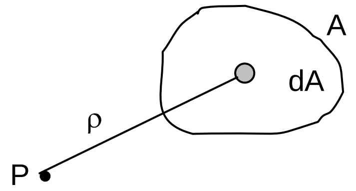
$$\boxed{I_x = \frac{b\,h^3}{12}}$$

2. Polair traagheidsmoment

2.1. Definitie

Een polair traagheidsmoment is een traagheidsmoment van een oppervlak A berekend omheen een punt, dus :

$$\boxed{I_p = \int_A \rho^2 \, dA}$$

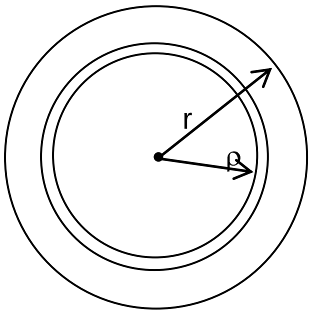


Vermis $\rho^2 = x^2 + y^2$

is $I_p = \int_A \rho^2 \, dA = \int_A x^2 \, dA + \int_A y^2 \, dA$

$$\boxed{I_p = I_x + I_y}$$

2.2. Polair traagheidsmoment van een cirkel

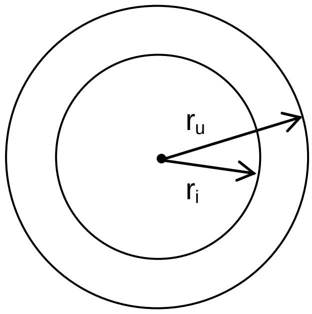


$$I_P = \int_A \rho^2 \, dA \quad \text{met } dA = 2\,\pi\,\rho\,d\rho$$

$$I_P = \int_0^r \rho^2 \, 2\,\pi\,\rho\,d\rho = 2\,\pi \int_0^r \rho^3 \, d\rho = 2\,\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^r = \frac{2\,\pi\,r^4}{4}$$

$$\boxed{I_P = \frac{\pi\,r^4}{2}}$$

2.3. Polair traagheidsmoment van een ring



$$I_P = \int_A \rho^2 \, dA \quad \text{met } dA = 2\,\pi\,\rho\,d\rho$$

$$I_P = \int_{r_i}^{r_u} \rho^2 \, 2\,\pi\,\rho\,d\rho = 2\,\pi \int_{r_i}^{r_u} \rho^3 \, d\rho = 2\,\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{r_i}^{r_u} = \frac{2\,\pi\,(r_u^4 - r_i^4)}{4}$$

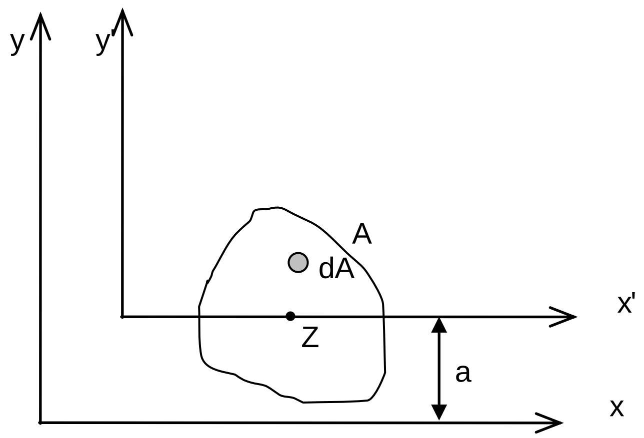
$$\boxed{I_P = \frac{\pi\,(r_u^4 - r_i^4)}{2}}$$

Het polair traagheidsmoment van een ring is dus gelijk aan het verschil van het polair traagheidsmoment van de buitencirkel en het polair traagheidsmoment van de binnencirkel.

3. Verschuivingsformules voor het traagheidsmoment

3.1. Het traagheidsmoment van een figuur met oppervlakte A t.o.v. een rechte x is gelijk aan het traagheidsmoment van die figuur t.o.v. een evenwijdige rechte x' door het zwaartepunt, vermeerderd met het product van oppervlakte A met het kwadraat van de onderlinge afstand a tussen beide rechten.

$$I_x = I_{x'} + a^2 A$$



$$I_x = \int_A y^2\, dA = \int_A (y'+a)^2\, dA = \int_A y'^2\, dA + 2\,a \int_A y'\, dA + a^2 \int_A dA$$

$$I_x = I_{x'} + 0 + a^2\, A$$

$\int_a y'\, dA$ is het statisch moment van oppervlak A t.o.v. rechte x'. Deze rechte x' gaat echter hier door het zwaartepunt Z, en dus is het statisch moment gelijk aan 0.

Het statisch moment t.o.v. een rechte is het product van de oppervlakte van een doorsnede met de afstand van het zwaartepunt van die doorsnede tot die rechte. Wanneer die rechte door het zwaartepunt gaat is het statisch moment dus 0.

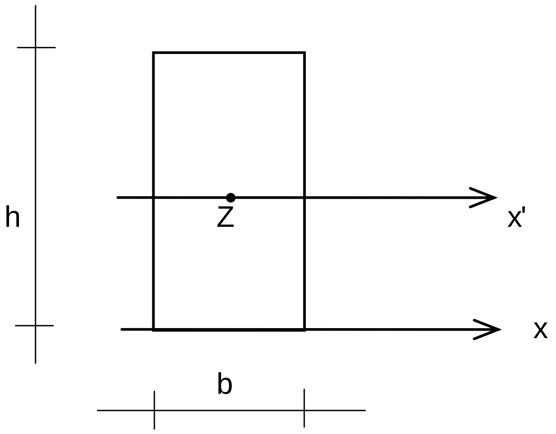
Dus : $I_x = I_{x'} + a^2\, A$

Vermits x' door het zwaartepunt Z gaat stelt men $I_{x'}$ ook voor door I_Z, en dus :

$$\boxed{I_x = I_Z + a^2\, A}$$

3.2. Voorbeeld

Gevraagd het traagheidsmoment I_x van een rechthoek t.o.v. de basis (zie ook art. 1.2.2.)

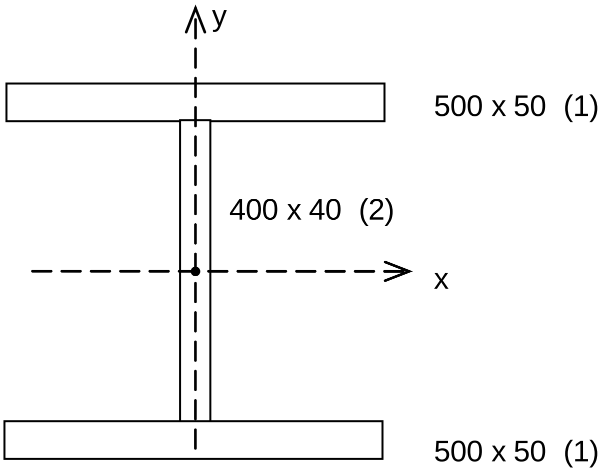


$$I_x = I_Z + a^2\, A = \frac{b\,h^3}{12} + \left[\frac{h}{2}\right]^2 b\,h = \frac{b\,h^3}{12} + \frac{b\,h^3}{4} = \frac{b\,h^3}{3}$$

4. Traagheidsmomenten van samengestelde doorsneden : voorbeeld

Bepaal I_x en I_y (x en y gaan door het zwaartepunt)

afmetingen in mm



$$I_{x,1} = I_Z + a^2 A = \frac{500 \times 50^3}{12} + 225^2 \times 500 \times 50 = 1\,270\,800\,000 \text{ mm}^4$$

$$I_{x,2} = \frac{40 \times 400^3}{12} = 213\,330\,000 \text{ mm}^4$$

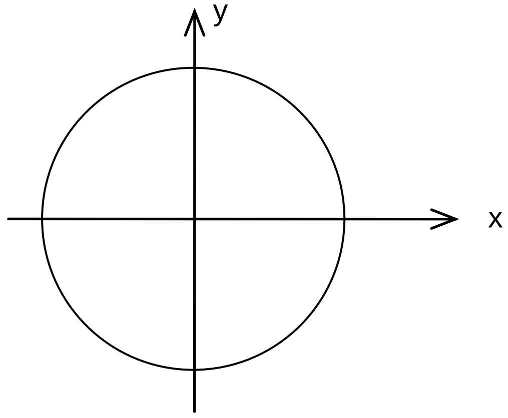
$$I_x = 2\, I_{x,1} + I_{x,2} = 2\,754\,930\,000 = 275\,493.\,10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 2 \times \frac{50 \times 500^3}{12} + \frac{400 \times 40^3}{12} = 104\,170\,000 + 2\,133\,333$$

$$= 106\,303\,000 \text{ mm}^4$$

5. Lijntraagheidsmomenten van cirkel en halve cirkel

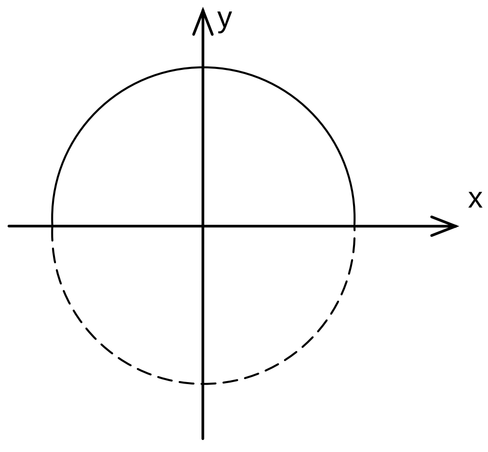
5.1. Cirkel, traagheidsmoment rond zijn middellijn



Vermits $I_x = I_y$ en $I_P = I_x + I_y$

is $I_x = I_y = I_P/2 = \dfrac{\pi r^4}{4}$

5.2. Halve cirkel, traagheidsmoment I_x rond zijn middellijn, en traagheidsmoment I_y rond zijn symmetrieas



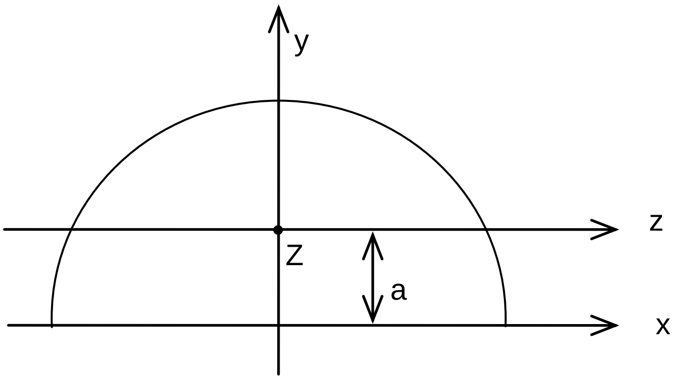
I_x van een halve cirkel is de helft van het traagheidsmoment van een volledige cirkel, dus :

$$I_x = \frac{\pi r^4}{8}$$

I_y van een halve cirkel is de helft van het traagheidsmoment van een volledige cirkel, dus :

$$I_y = \frac{\pi r^4}{8}$$

5.3. Halve cirkel, eigen traagheidsmoment I_Z rond een as // met zijn middellijn



ligging van zwaartepunt Z : $a = \dfrac{4\,r}{3\,\pi}$

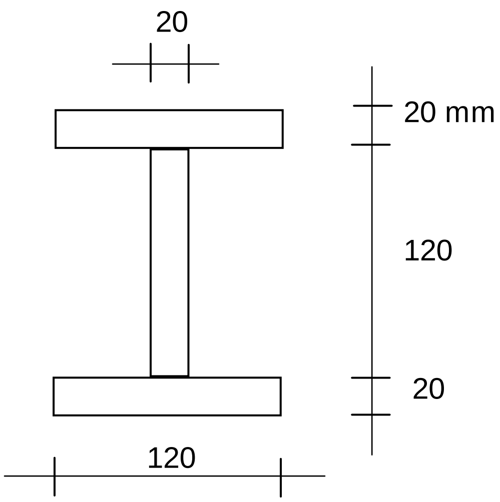
$$A = \frac{\pi\, r^2}{2}$$

$$I_x = I_Z + A\, a^2 \quad \rightarrow \quad I_Z = I_x - A\, a^2$$

$$I_Z = \frac{\pi\, r^4}{8} - \frac{\pi\, r^2}{2}\left(\frac{4\,r}{3\,\pi}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\,\pi}\right) r^4 = 0{,}11\, r^4$$

6. Opgaven

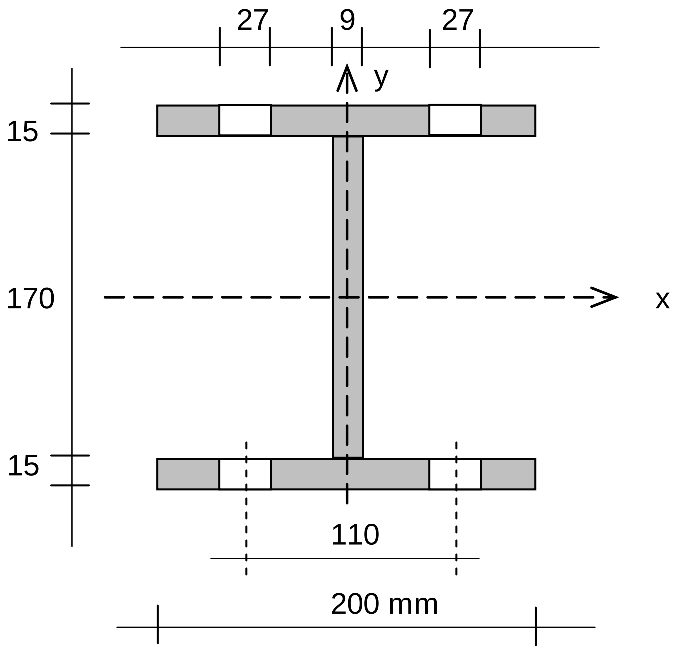
1. Bereken de traagheidsmomenten rond de symmetrieassen x en y



$$I_x = \frac{120 \,.\, 160^3}{12} - \frac{100 \,.\, 120^3}{12} = 26\,560\,000 \text{ mm}^4 = 2656 \,.\, 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 2\,\frac{20 \,.\, 120^3}{12} + \frac{120 \,.\, 20^3}{12} = 5\,840\,000 \text{ mm}^4 = 584 \,.\, 10^4 \text{ mm}^4$$

2. Bereken de traagheidsmomenten rond de symmetrieassen x en y van dit HEB200 staalprofiel, dat 4 boutgaten bevat



$$I_x = I_{x,profiel} - 4\, I_{x,gat}$$

$$I_x = \frac{200\,.\,200^3}{12} - \frac{191\,.\,170^3}{12} - 4\left[\frac{27\,.\,15^3}{12} + 92{,}5^2\,.\,27\,.\,15\right]$$

$$= 133\,330\,000 - 78\,198\,583 - 4\,(7\,594 + 3\,465\,281)$$

$$= 41\,239\,917 \text{ mm}^4$$

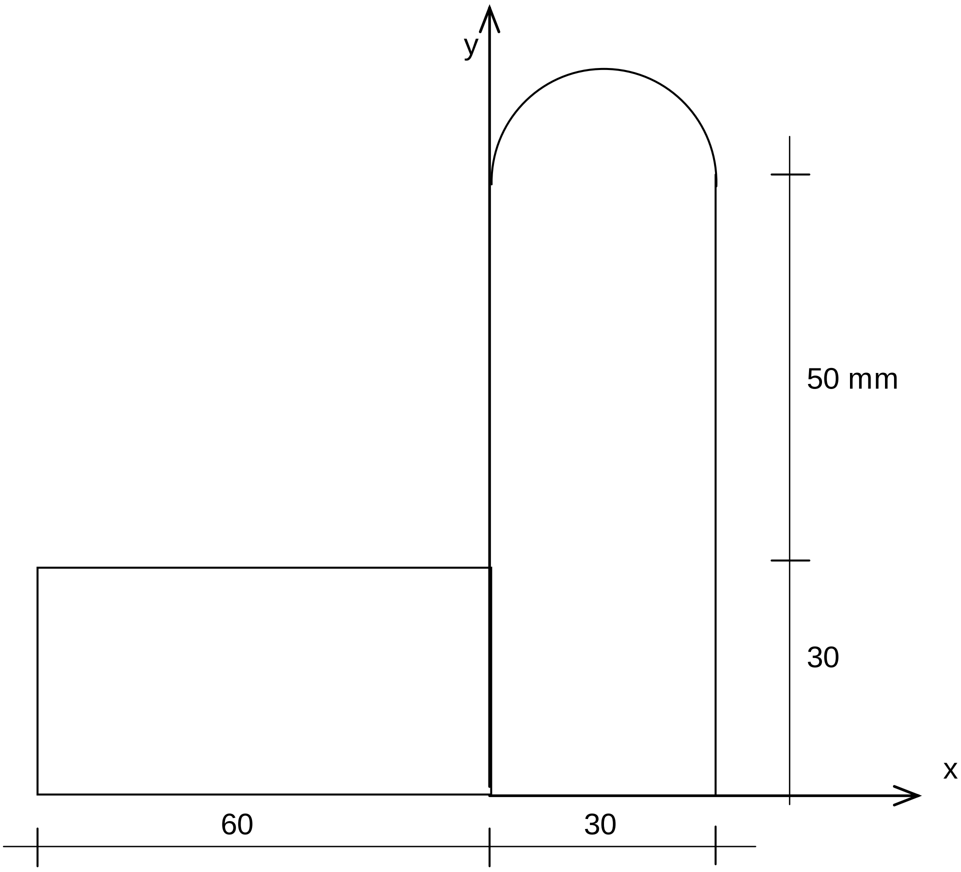
$$I_y = I_{y,profiel} - 4\, I_{y,gat}$$

$$I_y = 2\frac{15\,.\,200^3}{12} + \frac{170\,.\,9^3}{12} - 4\left[\frac{15\,.\,27^3}{12} + 55^2\,.\,27\,.\,15\right]$$

$$= 20\,000\,000 + 10\,328 - 4\,(24\,604 + 1\,225\,125)$$

$$= 15\,007\,412 \text{ mm}^4$$

3.. Bereken de traagheidsmomenten rond de assen x en y



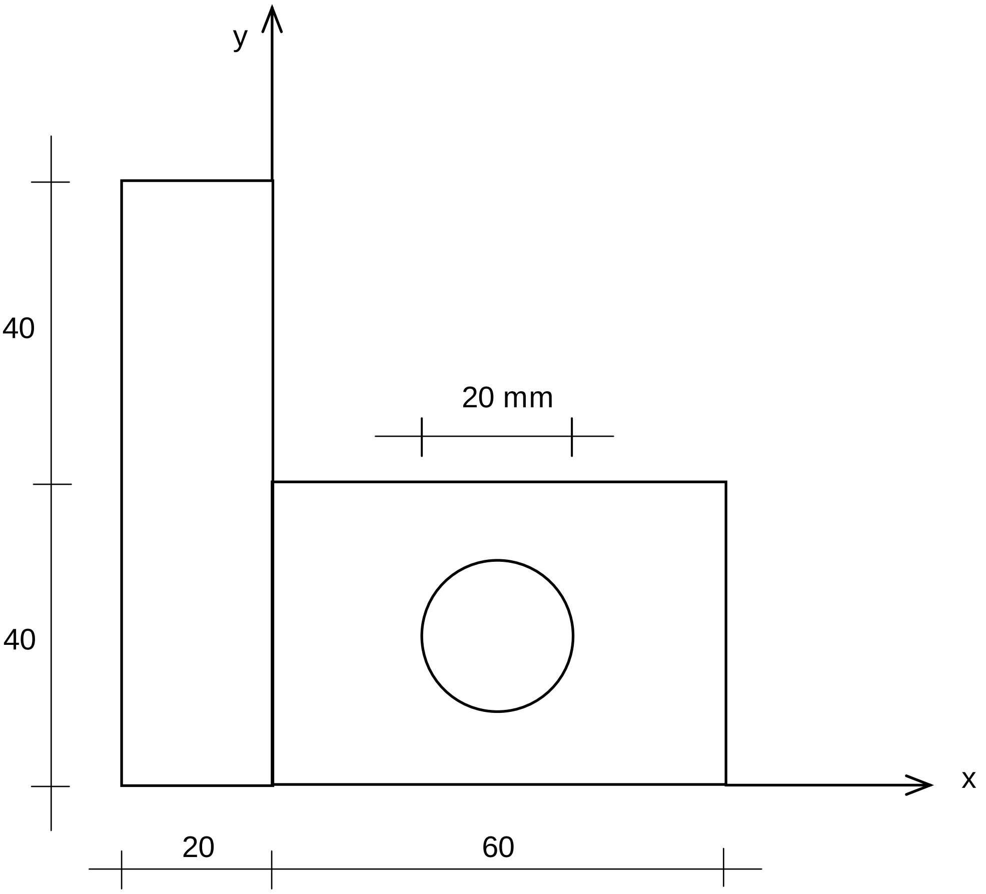
$$I_x = \frac{60.\,30^3}{3} + \frac{30\,.\,80^3}{3} + \left[0{,}11\,.\,15^4 + (80 + \frac{4\,.\,15}{3\,\pi})^2\,.\,\frac{\pi\,15^2}{2}\right]$$

$$= 540\,000 + 5\,120\,000 + 2\,642\,000 = 8\,302\,000 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{30.\,60^3}{3} + \frac{80\,.\,30^3}{3} + \left[\frac{\pi\,15^4}{8} + 15^2.\,\frac{\pi\,15^2}{2}\right]$$

$$= 2\,160\,000 + 720\,000 + 990\,000 = 2\,979\,000 \text{ mm}^4$$

4. Bereken de traagheidsmomenten rond de assen x en y



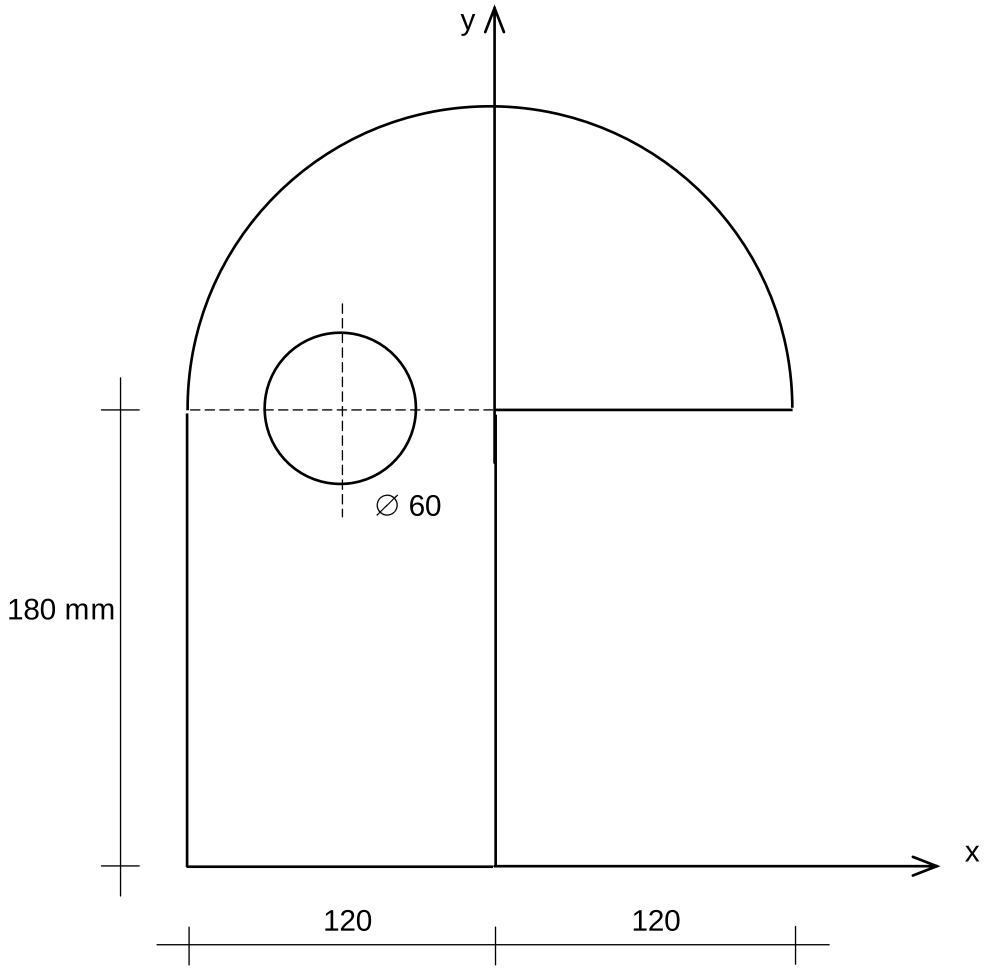
$$I_x = \frac{20.\,80^3}{3} + \frac{60\,.\,40^3}{3} - \left[\frac{\pi\,10^4}{4} + 20^2\,\pi\,10^2\right]$$

$$= 4\,560\,000 \ \ mm^4$$

$$I_y = \frac{80.\,20^3}{3} + \frac{40\,.\,60^3}{3} - \left[\frac{\pi\,10^4}{4} + 30^2\ \pi\,10^2\right]$$

$$= 2\,803\,000 \ \ mm^4$$

5. Bereken de traagheidsmomenten rond de assen x en y



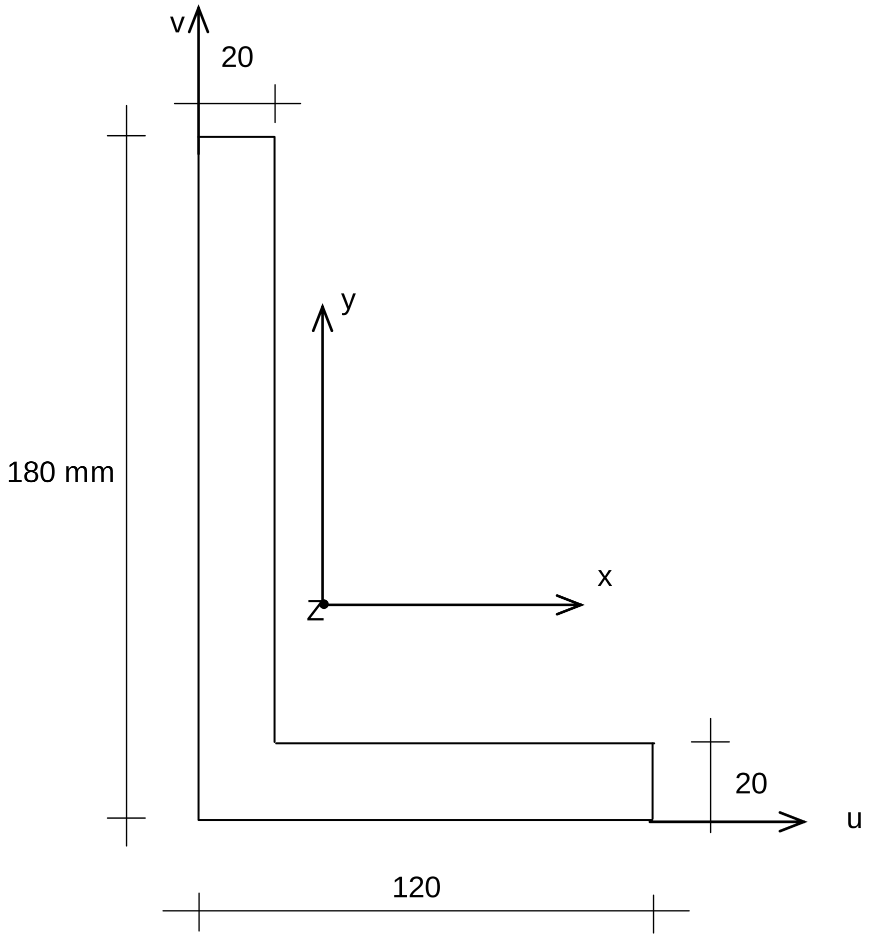
$$I_x = \frac{120.180^3}{3} + \left[0{,}11.120^4 + (180 + \frac{4.120}{3\pi})^2 . \frac{\pi\, 120^2}{2}\right] - \left[\frac{\pi\, 30^4}{4} + 180^2 \pi\, 30^2\right]$$

$= 1\ 370\ 130\ 000\ mm^4 = 137\ 013\ .\ 10^4\ \ mm^4$

$$I_y = \frac{180.120^3}{3} + \frac{\pi\, .\, 120^4}{8} - \left[\frac{\pi\, 30^4}{4} + \pi\, 30^2 . 60^2\right]$$

$= 174\ 300\ 000\ mm^4 = 17\ 430\ .\ 10^4\ \ mm^4$

6. Bereken de traagheidsmomenten rond de assen x en y die door het zwaartepunt Z van de figuur gaan



We moeten eerst de ligging van het zwaartepunt Z bepalen in het assenkruis u-v.

Dit gebeurt op basis van volgende eigenschap : Het statisch moment van een figuur is gelijk aan de som van de statische momenten van de onderdelen van die figuur, berekend rond dezelfde as. M.a.w. : het product van de oppervlakte van een figuur met de afstand van zijn zwaartepunt tot een as, is gelijk aan de som van de producten van de oppervlakte van de respectieve onderdelen van de figuur met telkens de afstand van het zwaartepunt van de oppervlakte van dat onderdeel tot die as.

Dus : $(180 \,.\, 20 \;+ 100 \,.\, 20)\, v_Z \;=\; 180 \,.\, 20 \,.\, 90 \;+\; 100 \,.\, 20 \,.\, 10$

en dus : $v_Z \;=\; \dfrac{180 \,.\, 20 \,.\, 90 + 100 \,.\, 20 \,.\, 10}{180 \,.\, 20 + 100 \,.\, 20} \;=\;$ 61,43 mm

Analoog : $(180 \,.\, 20 \;+ 100 \,.\, 20)\, u_Z \;=\; 180 \,.\, 20 \,.\, 10 \;+\; 100 \,.\, 20 \,.\, 70$

en dus : $u_Z \;=\; \dfrac{180 \,.\, 20 \,.\, 10 + 100 \,.\, 20 \,.\, 70}{180 \,.\, 20 + 100 \,.\, 20} \;=\;$ 31,43 mm

Nu kunnen we I_x en I_y vinden :

$$I_x = \frac{20 . 180^3}{12} + 180 . 20 (90 - 61{,}43)^2 + \frac{100 . 20^3}{12} + 100 . 20 (10 - 61{,}43)^2$$

$$= 18\,015\,000 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{180 . 20^3}{12} + 180 . 20 (10 - 31{,}43)^2 + \frac{20 . 100^3}{12} + 100 . 20 (70 - 31{,}43)^2$$

$$= 6\,415\,000 \text{ mm}^4$$