

De Afgeleide

DE AFGELEIDE FUNCTIE VAN EEN GEGEVEN FUNCTIE $y = f(x) = u$ is een andere functie genoteerd met y' die uit $f'(x)$ wordt verkregen door toepassing van enkele basisformules.

Zo is $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$, met $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Bijvoorbeeld is $(u^2)' = 2u \cdot u'$, $(u^3)' = 3u^2 \cdot u'$, ...

Meer algemeen is $(u^r)' = r \cdot u^{r-1} \cdot u'$, voor willekeurige $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$. De formule geldt dus ook voor gebroken exponenten: voor $n = 1/2$ bijvoorbeeld, zal

$$(\sqrt{u})' = (u^{1/2})' = \frac{1}{2} u^{-1/2} \cdot u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Als u de identieke functie van x is, dus $u=x$, dan is $u'=1$, zodat in het bijzonder $(x^3)' = 3x^2$ en $(x^2)' = 2x$.

Als u en v twee functies zijn van x , dan is

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}.$$

Als k een getal is, wordt $(ku)' = k \cdot u'$ en $k' = 0$.

VOORBEELDEN

1) Stel $y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5$ dan wordt $y' = 2 - 6x - 15x^2 - 32x^3 + 45x^4$.

2) Stel $y = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$, dan wordt $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$.

3) Als $y = (x^2 + 4)^2(2x^3 - 1)^3$, dan is $y' = 2x(x^2 + 4)(2x^3 - 1)^2(13x^3 + 36x - 2)$.

KETTINGREGEL. Als $y = f(x)$ en y is op de beurt verbonden in een formule $z = g(y)$ dan wordt dz/dx gevonden door $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$. Met de accentnotatie zou men dus $z'_x = z'_y \cdot y'_x$ of iets dergelijks moeten noteren (er

is natuurlijk een probleempje omdat men niet precies weet waarvoor het accent nu staat, dit nu een afgeleide is naar x of naar y). Een duidelijker notatie is wellicht

$$\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dx}, \text{ of } D_x f(u) = f'(u) \cdot u'.$$

Bijvoorbeeld, als $y = 2x + 1$ en $z = y^2 + 3$ dan is

$$z = (2x+1)^2 + 3. \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}(y^2 + 3) \frac{d}{dx}(2x+1) = 2y \cdot 2 = 4y = 4 \cdot (2x+1)$$

Of, indien men eerst z uitrekent, dan is $z = 4x^2 + 4x + 1 + 3 = 4x^2 + 4x + 4$, en dus $dz/dx = 8x + 4 = 4(2x + 1)$. Het levert hetzelfde resultaat.

De afgeleide naar x van de functie $y = f(x)$ wordt genoteerd met een van de volgende symbolen: y' , $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, of $D_x y$ en gelezen als de "afgeleide van y of van $f(x)$ met respect tot x ". De waarde van de afgeleide voor een gegeven waarde van x , stel x_0 , genoteerd met $y'|_{x=x_0}$, $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$, of $f'(x)|_{x=x_0}$.

Afhankelijk van de hoeveelheden die door x en $y = f(x)$ worden voorgesteld, kan de afgeleide geïnterpreteerd worden als de richtingscoëfficiënt van een kromme, zoals snelheid, versnelling, enzovoort.

HOGERE ORDE AFGELEIDEN. De procedure om de afgeleide van een gegeven functie te vinden heet *differentiatie*. Door differentiatie, verkrijgen we uit een gegeven functie $y = f(x)$ een andere functie $y' = f'(x)$ die we nu de *eerste orde afgeleide* van y of van $f(x)$ naar x zullen noemen. Indien $y' = f'(x)$ opnieuw wordt afgeleid naar x , wordt een andere functie $y'' = f''(x)$ verkregen, die de tweede orde afgeleide van y of van $f(x)$ wordt genoemd. Op analoge wijze kan een derde orde afgeleide worden bepaald, en zo verder.

VOORBEELD. Stel $y = f(x) = x^4 - 3x^2 + 8x + 6$. Dan is $y' = f'(x) = 4x^3 - 6x + 8$, $y'' = f''(x) = 12x^2 - 6$, $y''' = f'''(x) = 24x$. (Zie Vraagstuk 45.16.)

Oefeningen

1. a) als $y = \frac{3-2x}{3+2x}$, is $y' = -12/(3+2x)^2$;

b) als $y = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$, is $y' = \frac{8x-x^3}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

c) als $y = x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6$ is $y' = 5x(x^3 + 4x^2 - 4)$;

d) als $y = 3x^{1/2} - x^{3/2} + 2x^{-1/2}$, is $y' = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x^{3/2}}$;

e) als $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$, is $y' = (1+\sqrt{2})/\sqrt{2x}$;

f) als $y = (3 + 4x - x^2)^{1/2}$, is $y' = (2 - x)/y$;

2. Bepaal de richtingscoëfficiënt en de vergelijking van de raaklijn aan de gegeven kromme $y = f(x)$ in het gegeven punt:

(a) $y = 2x^3$ in $(1,2)$, (b) $y = -3x^2 + 4x + 5$ in $(3, -10)$, (c) $y = x^2 - 4x + 3$ in $(2, -1)$.

(a) $f'(x) = 6x^2$; dan is de richtingscoëfficiënt $m = f'(1) = 6$. De vergelijking van de raaklijn in $(1,2)$ is $y - 2 = 6(x - 1)$ of $6x - y - 4 = 0$.

(b) Hier is $f'(x) = -6x + 4$ en $m = f'(3) = -14$. De vergelijking van de raaklijn in $(3, -10)$ is $14x + y - 32 = 0$.

(c) Hier is $f'(x) = 2x - 4$ en $m = f'(2) = 0$. De vergelijking van de raaklijn in $(2, -1)$ is $y + 1 = 0$. Identificeer het gegeven punt op de parabool.

3. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de parabool $y^2 = 8x$ in (a) het punt $(2, 4)$, (b) het punt $(2, -4)$.

(a) In het punt $(2, 4)$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn (ook de richtingscoëfficiënt van de kromme genoemd) $m = 4/4 = 1$ en de vergelijking van de raaklijn is $x - y + 2 = 0$.

(b) In het punt $(2, -4)$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn $m = -1$ en de vergelijking $x + y + 2 = 0$.

4. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de ellips $4x^2 + 9y^2 = 25$ in (a) het punt $(2, 1)$, (b) het punt $(0, 5/3)$.

(a) In het punt $(2, 1)$, $m = -8/9$ en de vergelijking van de raaklijn is $8x + 9y - 25 = 0$.

(b) In het punt $(0, 5/3)$, $m = 0$ en de vergelijking van de raaklijn is $y - 5/3 = 0$.

5. De normaallijn aan een kromme in een punt P is de loodrechte aan de raaklijn in P . Bepaal de vergelijking van de normaallijn aan de gegeven kromme in het gegeven punt van (a) Vraagstuk 2b, (b) Vraagstuk 4.

(a) De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is -14 ; de richtingscoëfficiënt van de normaallijn is $1/14$. De vergelijking van de normaallijn is $y + 10 = (1/14)(x - 3)$ of $x - 14y - 143 = 0$.

(b) De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $(2, 1)$ is $-8/9$; de richtingscoëfficiënt van de normaallijn is $9/8$. De vergelijking van de normaallijn is $9x - 8y - 10 = 0$.

In het punt $(0, 5/3)$ is de normaallijn vertikaal. De vergelijking is $x = 0$.

6. Bepaal de afgeleide van elk van de volgende veeltermen:

$$(a) f(x) = 3x^2 - 6x + 5, \quad (b) f(x) = 2x^3 - 8x + 4, \quad (c) f(x) = (x - 2)^2(x - 3)^2.$$

$$(a) f'(x) = 3 \cdot 2x^{2-1} - 6x^{1-1} + 0 = 6x - 6.$$

$$(b) f'(x) = 2 \cdot 3x^{3-1} - 8x^{1-1} + 0 = 6x^2 - 8.$$

$$(c) \text{ Hier } f(x) = x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36. \text{ Dan is } f'(x) = 4x^3 - 30x^2 + 74x - 60 = (x - 2)(x - 3)(4x - 10).$$

7. Voor elk van de volgende functies, bepaal $f'(x)$, $f''(x)$, en $f'''(x)$:

$$(a) f(x) = 2x^2 + 7x - 5, \quad (b) f(x) = x^3 - 6x^2, \quad (c) f(x) = x^5 - x^3 + 3x$$

$$(a) f'(x) = 4x + 7, f''(x) = 4, f'''(x) = 0.$$

$$(b) f'(x) = 3x^2 - 12x, f''(x) = 6x - 12, f'''(x) = 6,$$

$$(c) f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 3, f''(x) = 20x^3 - 6x, f'''(x) = 60x^2 - 6.$$

8. Bepaal de vergelijking van de raaklijn en de normaal van elke kromme in het gegeven punt op de kromme.

$$(a) y = x^2 + 2, P(1, 3) \quad \text{Antw. } 2x - y + 1 = 0, x + 2y - 7 = 0$$

$$(b) y = 2x^2 - 3x, P(1, -1) \quad \text{Antw. } x - y - 2 = 0, x + y = 0$$

$$(c) y = x^2 - 4x + 5, P(1, 2) \quad \text{Antw. } 2x + y - 4 = 0, x - 2y + 3 = 0$$

$$(d) y = x^2 + 3x - 10, P(2, 0) \quad \text{Antw. } 7x - y - 14 = 0, x + 7y - 2 = 0$$

$$(e) x^2 + y^2 = 25, P(4, 3) \quad \text{Antw. } 4x + 3y - 25 = 0, 3x - 4y = 0$$

$$(f) y^2 = 4x - 8, P(3, -2) \quad \text{Antw. } x + y - 1 = 0, x - y - 5 = 0$$

$$(g) x^2 + 4y^2 = 8, P(-2, -1) \quad \text{Antw. } x + 2y + 4 = 0, 2x - y + 3 = 0$$

$$(h) 2x^2 - y^2 = 9, P(-3, 3) \quad \text{Antw. } 2x + y + 3 = 0, x - 2y + 9 = 0$$

9. Bepaal de coördinaten van de punten waarvan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan $y = x^3 - 12x + 1$ gelijk is aan 0.

$$\text{Antw. } (2, -15), (-2, 17)$$

10. In welk punt van $y = (1/2)x^2 - 2x + 3$ staat de raaklijn loodrecht op deze in het punt $(1, 0)$?

$$\text{Antw. } (3, 3/2)$$

BEREKENING VAN MINIMA EN MAXIMA. Een functie $y = f(x)$ wordt een *stijgende functie* genoemd als y toeneemt wanneer x toeneemt, en een *dalende functie* wanneer y afneemt als x toeneemt. Stel dat de grafiek van $y = f(x)$ is zoals getoond in Fig. 47-1. Dan is $y = f(x)$ duidelijk een stijgende functie van A naar B en van C tot D , en ze is een dalende functie van B naar C en van D tot E . Wanneer $x = b$, $x = c$, en $x = d$, is de functie noch stijgend noch dalend en daar is $f'(x) = 0$. Dergelijke waarden van x worden *kritische waarden* voor de functie $f(x)$ genoemd.

In B is de waarde $f(b)$ groter dan in elke andere waarde van de kromme nabij B . We zeggen daarom dat het punt $B(b, f(b))$ een *relatief maximum punt* van de kromme is of dat de functie $f(x)$ een *relatief maximum* [= $f(b)$] heeft wanneer $x = b$. Door dezelfde argumentatie zal ook $D(d, f(d))$ een relatief maximum punt van de kromme zijn, of nog, zal $f(x)$ een relatief maximum [= $f(d)$] hebben wanneer $x = d$.

Als we B verlaten, daalt het punt tot in C om daarna opnieuw te stijgen. In C is de waarde $f(c)$ kleiner dan in elk ander punt van de kromme nabij C . We zeggen daarom dat het punt $C(c, f(c))$ een *relatief minimum punt* van de kromme is, of dat $f(x)$ een *relatief minimum* [= $f(c)$] heeft wanneer $x = c$.

Merk op dat het relatieve maximum en minimum van deze functie voorkomen bij de kritische waarden. Hoewel die niet zo is voor alle functies, is deze bewering toch waar voor de meeste functies beschouwd in elementaire toepassingen.

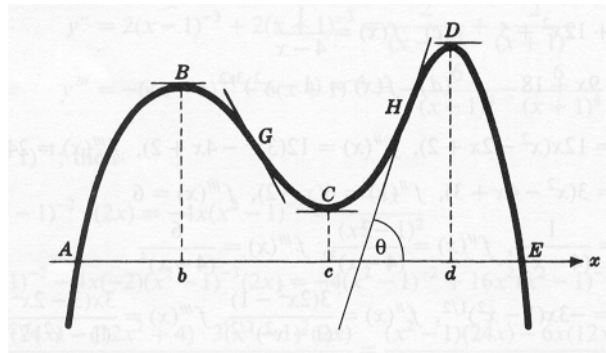


Fig. 47-1

VOORBEELD 1. Voor de functie $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $f'(x) = 2x - 6$.

Als we $f'(x) = 0$ stellen, vinden we de kritische waarde $x = 3$. Er blijkt dat $f(x) = x^2 - 6x + 8$ een dalende functie is wanneer $x < 3$ een stijgende functie wanneer $x > 3$.

Opgeloste Vraagstukken

1. Bepaal de intervallen waarop elk van de volgende stijgende functies zijn en de intervallen waarop ze dalende functies zijn:

(a) $f(x) = x^2 - 8x$

(c) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5$

(e) $f(x) = (x - 2)^3$

(b) $f(x) = 2x^3 - 24x + 5$

(d) $f(x) = x^3 + 3x$

(f) $f(x) = (x-1)^3(x-2)$

(a) Hier is $f'(x) = 2(x - 4)$. Gelijk stellen aan 0 en oplossen geeft de kritische waarde $x = 4$.

(b) $f'(x) = 6x^2 - 24 = 6(x + 2)(x - 2)$; de kritische waarden zijn $x = -2$ en $x = 2$.

(c) $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x + 1)(x - 3)$; de kritische waarden zijn $x = -1$ en $x = 3$.

(d) $f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$; er zijn geen kritische waarden.

(e) $f'(x) = 3(x - 2)^2$; de kritische waarde is $x = 2$.

(f) $f'(x) = (x - 1)^2(4x - 7)$; de kritische waarden zijn $x = 1$ en $x = 7/4$.

2. Bepaal de relatieve maxima en minima van de functies van Vraagstuk 1.

(a) Relatief minimum $f(4) = -16$.

(b) Relatief minimum $f(2) = -27$.

(c) Relatief maximum $f(3) = 32$, en relatief minimum $f(-1) = 0$.

(d) Geen relatief maximum en ook geen relatief minimum.

(e) Geen relatief maximum noch minimum.

(f) De functie heeft een relatief minimum $f(7/4) = -27/256$. De kritische waarde $x = 1$ levert geen relatief maximum en ook geen minimum.

3. Bepaal twee gehele getallen waarvan de som 12 is en het product maximaal is.

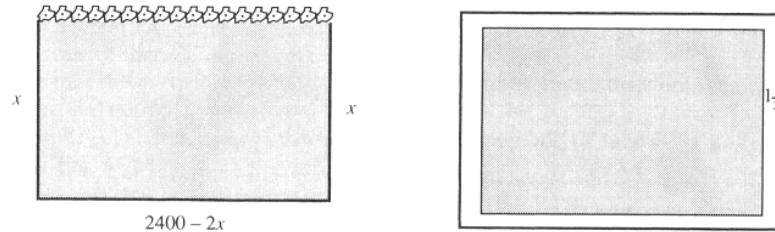
Stel dat x en $12 - x$ deze gehele getallen zijn; hun product is $x(12 - x) = 12x - x^2$. Vermits $f'(x) = 12 - 2x = 2(6 - x)$, is $x = 6$ de kritische waarde. Uit de aard van het vraagstuk volgt dat $x = 6$ een relatief maximum geeft. De gehele getallen zijn 6 en 6, tweemaal geteld dus.

Merk op dat we eigenlijk bewezen hebben dat de rechthoek met een gegeven omtrek een maximale oppervlakte heeft wanneer het een vierkant is.

4. Een boer wenst een rechthoekig terrein voor begrazing af te zetten door een draadhek te gebruiken aan drie zijden en een hagenrij als vierde zijde. Als hij 2400 ft draad heeft, wat is dan de grootste oppervlakte die hij kan afzetten?

Laat x de lengte zijn van de gelijke te bedraden zijden; de lengte van de derde zijde is dan $2400 - 2x$. Zie figuur.

De oppervlakte is $A = f(x) = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$. Nu is $f'(x) = 2400 - 4x = 4(600 - x)$ en de kritische waarde is dus $x = 600$. Dit levert $x = 600$ als relatief maximum, en $f(600) = 720\,000$ ft².



5. Een bladzijde bevat 54 vierkante inches met drukwerk. Als de marges 1 in. zijn boven- en onderaan en $3/2$ in aan de zijkanten, bepaal dan de meest economische dimensies van de pagina. Zie figuur.

Laat de dimensies van het drukwerk met x en y genoteerd worden; dan is $xy = 54$.

De dimensies van de pagina zijn $x + 3$ en $y + 2$; de oppervlakte van de pagina is $A = (x + 3)(y + 2)$.

Vermits $y = 54/x$, $A = f(x) = (x + 3)(54/x + 2) = 60 + 162/x + 2x$. Dan $f'(x) = -162/x^2 + 2$ en de kritische waarden zijn $x = 9$ en $x = -9$. Het relatieve minimum wordt gegeven door $x = 9$. De gevraagde dimensies van de bladzijde zijn 12 in. voor de breedte en 8 in. voor de hoogte.

Aanvullende oefeningen

6. Bepaal de relatieve maxima en minima van de functies:

(a) $f(x) = x^2$

Antw. Min. = 0

(b) $f(x) = 4 - x^2$

Antw. Max. = 4

(c) $f(x) = x^2 + 6x - 5$

Antw. Min. = -14

(d) $f(x) = 3x^2 + 6x + 18$

Antw. Min. = 15

(e) $f(x) = (x - 2)^4$

Antw. Min. = 0

(f) $f(x) = (x - 1)^3(x + 2)^2$

Antw. Max. = 0, min. = -26244/3125

7. De som van twee positieve getallen is 12. Bepaal de getallen

(a) als de som van hun kwadraten een minimum is;

(b) als het product van een ervan met het kwadraat van de andere maximaal is;

(c) als het product van een ervan met de derde macht van de andere maximaal is.

Antw. (a) 6 en 6; (b) 4 en 8; (c) 3 en 9.

8. Bepaal de afmetingen van de grootste open doos die gemaakt kan worden uit een vierkant vel tin van 24 op 24 in. door gelijke vierkantjes uit de hoeken af te snijden en de zijde naar boven te plooiën.

Antw. 16 x 16 x 4 in.

9. Bepaal de afmetingen van de grootste open doos die gemaakt kan worden uit een rechthoekig vel tin van 60 in. bij 28 in. door gelijke vierkantjes uit de hoeken af te snijden en de zijde naar boven te plooiën.

Antw. 48 x 16 x 6 in.

10. Een rechthoekig veld moet afgebakend worden door een draadhek en onderverdeeld in twee kleinere delen door een hek evenwijdig aan een van de zijden. Bepaal de afmetingen van het grootste veld dat zo kan omringd worden met 1200 ft draad.

Antw. 200 x 300 ft

11. Als een boer zijn oogst vandaag oogst, zal hij 1200 kg hebben, die \$2.00 per kg waard zijn. Elke week meer dat hij wacht, stijgt de oogst met 100 kg maar daalt de prijs met 10c per kg. Wanneer zou hij de oogst moeten binnenhalen?

Antw. 4 weken vanaf vandaag.

12. De basis van een gelijkbenige driehoek is 20 ft en zijn hoogte is 40 ft. Bepaal de afmetingen van de grootste ingeschreven rechthoek als twee van toppen op een basis van de driehoek liggen.

Antw. 10 x 20 ft