

**HERHALING VAN BASISBEGRIPPEN.**

De indeling volgt ongeveer, op enkele toevoegingen en weglatingen na, deze van het boek «Schaum's Outlines, College Mathematics».

**Chapter 23: Angles and Arc Length: Hoeken en Booglengten.**

De volgende berekeningen moet men vlot kunnen uitvoeren, met of zonder rekenmachine:

a)  $\frac{1}{4} (36^\circ 24') = 9^\circ 6'$

b)  $\frac{1}{2} (127^\circ 24') = 63^\circ 42'$

c)  $\frac{1}{2} (84^\circ 45') = 42^\circ 22' 30''$

d)  $\frac{1}{4} (74^\circ 29' 20'') = 18^\circ 37' 20''$ .

In sommige rekenprogramma's moet men eerst een uitdrukking omzetten in graden met een decimale notatie voor de minuten en seconden. Daarna zet men het resultaat opnieuw om. Het omzetten van radialen naar graden (zestigdelige) gebeurt frequent:  $1 \text{ rad} = 180^\circ/\pi = 57^\circ,296 = 57^\circ 17' 45''$ , en omgekeerd  $1 \text{ graad} = \pi \text{ rad} / 180 = 0,017453\dots \text{ rad}$ .

**VOORBEELDEN:**

a)  $7\pi/12 \text{ rad} = 105^\circ$

b)  $50^\circ = 5\pi/18 \text{ rad} = 0,872664\dots$

Indien men de berekeningen zou uitvoeren met een gewone alledaagse rekenmachine, krijgt men na deling van  $0,872664\dots$  door  $\pi$ , bij benadering het decimale getal  $0,277\dots$ . Om hieruit de breuk  $5/18$  af te leiden, stelt men  $0,277\dots = 0,2 + 0,1 \times 0,77\dots = 2/10 + 1/10 \times 7/9 = 5/18$ . Terloops, merk op dat net zoals  $0,777\dots = 7/9$ , ook  $0,999\dots = 1$ , niet bij benadering, maar exact (want  $0,99\dots = 9 \cdot 0,11\dots = 9 \cdot 1/9 = 9/9 = 1$ ).

**OEFENINGEN.**

1. Druk de volgende hoeken uit in radialen:

a)  $30^\circ$  b)  $135^\circ$  c)  $25^\circ 30'$  d)  $42^\circ 24' 35''$ .

Opl. a)  $30^\circ = \pi/6 \text{ rad}$ . Vanzelfsprekend volgt uit  $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$  dat  $30^\circ = 360^\circ/12 = 2\pi/12 \text{ rad} = \pi/6 \text{ rad}$ .

b)  $135^\circ = 2,35619\dots \text{ rad} = \pi \cdot 0,74999\dots = \frac{3}{4}\pi$ .

c)  $25^\circ 30' = 0,445058\dots \text{ rad}$ .

d)  $42^\circ 24' 35'' = 0,7401\dots \text{ rad}$ .

2. Druk de volgende hoeken uit in graden:

a)  $\pi/3 \text{ rad}$  b)  $5\pi/9 \text{ rad}$  c)  $2/5 \text{ rad}$  d)  $4/3 \text{ rad}$ .

Opl. a)  $60^\circ$  b)  $100^\circ$  c)  $22^\circ 55' 6''$  d)  $4/3 \text{ rad} = 4/3 \times 180^\circ = 240^\circ = 76.394372\dots = 76^\circ 23' 40''$ .

3. Een wiel draait met een snelheid van 48 omwentelingen per minuut = 48 omw/min.

Druk deze hoeksnelheid uit in: a) omwentelingen per seconde; b) radialen per minuut; c) radialen per seconde.

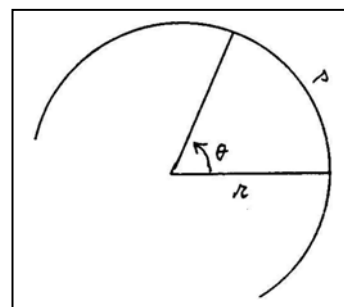
Opl. a)  $48 \text{ omw/min} = 48/60 \text{ omw/s} = 4/5 \text{ omw/s}$ .

b) Omdat 1 omwenteling =  $2\pi$  rad., is 48 omw/min =  $48 \cdot 2\pi$  rad/min = 301,6.

c) 48 omw/min = 5,03 rad/s.

### LENGTE VAN EEN BOOG.

In een cirkel met straal  $r$  onderschept een hoek  $\theta$  (in radialen) een boog met lengte  $s = r \cdot \theta$  (zie figuur). Zo zal in een cirkel met straal 30 cm de lengte van een boog onderschept door een hoek in het middelpunt van  $1/3$  radialen gelijk zijn aan  $s = r \cdot \theta = 30 \cdot 1/3 = 10$  cm.



Een hoek van  $50^\circ$  onderschept een boog met lengte  $s = r \cdot \theta = 30 \cdot 5\pi/18 = 25\pi/3$  cm. Een boog van 18 cm wordt onderschept door een hoek  $\theta = s/r = 18/30 = 3/5$  rad.

### OEFENINGEN.

1. De minutenwijzer van een horloge is 12 cm lang. Welke afstand doorloopt zijn uiteinde in 20 minuten?

Opl. De hoek is  $\theta = 120^\circ = 2\pi/3$  rad en het uiteinde doorloopt dus een  $s = r \cdot \theta = 12 (2\pi/3) = 8\pi$  (cm) = 25,1 (cm).

2. Een spoorweg moet de vorm aannemen van een cirkel. Wat moet de straal zijn indien de weg een richtingsverandering van  $25^\circ$  op 120 m moet ondergaan?

Opl. Men vraagt met andere woorden de straal te vinden van een cirkel waarvan de hoek in het middelpunt  $\theta = 25^\circ = 5\pi/36$  rad een boog met een lengte van 120m onderschept. Dus  $r = s/\theta = 120/(5\pi/36) = 864/\pi$  m = 275 m.

3. Een trein verplaatst zich met een snelheid van 8 km/h over een cirkelvormig deel met een straal van 2500 m. Hoeveel draait hij in één minuut?

Opl. Omdat  $8 \text{ km/h} = 8000\text{m}/(60\text{min}) = 133,3 \text{ m/min}$ , zal de trein een boog beschrijven met lengte  $s = 133,3$  m in 1 minuut. Dus is  $\theta = s/r = 0,0533$  rad, of  $3^\circ 3'$ .

4. We nemen aan dat de aarde een bol is met een straal van 6373 km. Vind de afstand tot de evenaar van een punt gelegen op  $36^\circ$  noorderbreedte.

Opl. Omdat  $36^\circ = \pi/5$  rad, zal  $s = r \cdot \theta = 6373 \cdot (\pi/5) = 4004$  km.

5. Twee steden bevinden zich op 434,5 km van elkaar op dezelfde meridiaan. Vind het verschil in breedte.

Opl.  $\theta = s/r = 434,5/6373 = 3/44$  rad =  $3^\circ 54,4'$

6. Vind de diameter van een aandrijf wiel dat aan 360 omw/min. draait, aangedreven door een riem zonder einde die zich aan 20 m/s verplaatst.

Opl. Omdat  $360 \text{ omw/min} = 360 \cdot (2\pi/60) \text{ rad/s} = 12\pi \text{ rad/s}$ , beschrijft het wiel een hoek van  $12\pi$  rad in 1 seconde. Maar een punt op zijn omtrek legt in 1 seconde 20 m af. Dus is de diameter:  $d = 2r = 2 \cdot s/\theta = 2 \cdot 20/(12\pi) \text{ m} = 1,06\text{m}$

### ANDERE HOEKEENHEDEN

Uit de Napoleontische tijd stamt de  $100^\circ$  - schaal: 1 rechte hoek wordt gelijk gesteld aan  $100^\circ$ , en verder wordt decimale onderverdeling gebruikt. Men vindt deze eenheid nog terug op Franse “Michelin”-kaarten, en ook in de landmeting zou deze eenheid toepassingen hebben. Op sommige rekenmachines wordt de eenheid met GRAD aangeduid, maar anderen spreken ook van “gon”. Zo is dus  $50 \text{ GRAD (of gon)} = 45^\circ$  (gewone graden).

Voor militaire doeleinden wordt ook de “mil” gebruikt: de maat van de hoek in het middelpunt van een cirkel, die een boog gelijk aan  $1/6400$  van de omtrek, onderschept. De naam is afkomstig van het feit dat, bij benadering,  $1 \text{ mil} \approx 1/1000$  radiaal. Inderdaad:  $1 \text{ mil} = 2\pi/6400 \text{ rad} = 2 \times 3,14/6400 \text{ rad} = 0,000981747704247\dots \approx 0,001$ .

### OEFENINGEN

1. Toon aan dat één graad (een  $360^\circ$ -graad) overeenkomt met ongeveer 111km. op het oppervlak, wanneer deze hoek wordt uitgezet vanuit het middelpunt van de aarde.
2. Toon aan dat één GRAD (honderddelige schaal) overeenkomt met ongeveer 100km. op het aardoppervlak wanneer deze hoek wordt uitgezet van het middelpunt van de aarde.
3. Met hoeveel km komt 1 mil overeen op het aardoppervlak?

## Chapter 24: Trigonometric Functions of a General Angle: Trigonometrische functies van een algemene hoek.

## Chapter 25: Trigonometric Functions of an Acute Angle: Trigonometrische functies van een scherpe hoek.

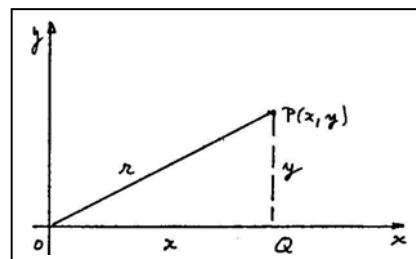
In de driehoek OPQ is

$$\sin \theta = y/r, \cos \theta = x/r,$$

$$\operatorname{tg} \theta = y/x, \operatorname{cot} \theta = x/y,$$

$$\operatorname{sec} \theta = r/x, \operatorname{cosec} \theta = r/y.$$

Uit deze definities leidt men af wat het teken van deze functies is in de verscheidene kwadranten.

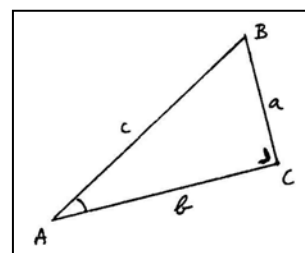


In een rechthoekige driehoek geldt

$$\sin A = a/c = \text{tegenoverstaande zijde/schuine zijde}$$

$$\cos A = b/c = \text{aanliggende zijde/schuine zijde}$$

$$\operatorname{tg} A = a/b = \text{tegenoverstaande zijde/aanliggende zijde}$$



### OEFFENINGEN.

1. De waarden vinden van de goniometrische functies van de hoek  $\theta$  (d.i. steeds de kleinste mogelijke en positieve hoek, in "standaard" positie). Eén been van de hoek  $\theta$  samenvalt samen met de x-as, de top van de hoek ligt in O, en op het andere been ligt een punt P met coördinaten:

a)  $P(3,4)$  b)  $P(-3,4)$  c)  $P(-1,-3)$ .

Opl. a)  $OP = r = 5$ , en  $\theta = 53^\circ 13' 01'' \dots$

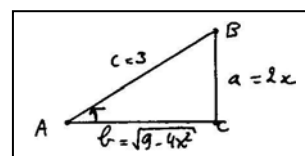
en  $\sin \theta = 0,8$ ,  $\cos \theta = 0,599 \dots = 3/5$ ,  $\operatorname{tg} \theta = 4/3 \dots$

b)  $\sin \theta = 4/5$ ,  $\cos \theta = -3/5$ ,  $\operatorname{tg} \theta = -4/5$ .

c)  $\sin \theta = -.9486 \dots$

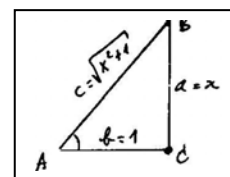
2. Als A een scherpe hoek is, en  $\sin A = 2x/3$ , vind dan de andere goniometrische functiewaarden.

Opl. Zie figuur:  $\cos A = \sqrt{(9-4x^2)}/3$ ,  $\operatorname{tg} A = 2x/\sqrt{(9-4x^2)}$



3. Als A een scherpe hoek is, en  $\operatorname{tg} A = x$ , vind dan de andere goniometrische functiewaarden.

Opl. Zie figuur:  $\sin A = x/\sqrt{(x^2+1)}$ ,  $\cos A = 1/\sqrt{(x^2+1)}$



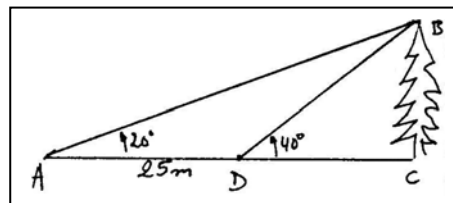
4. Wat is de lengte van de schaduw van een gebouw van 50 m hoog als de zon zich  $20^\circ$  boven de horizon bevindt?

Opl. Lengte = 50.  $1/\text{tg } 20^\circ = 135 \text{ m}$ .

5. Vanop een vuurtoren 40 m boven de zee, is de hoek waaronder men een boot ziet  $15^\circ$ . Op welke afstand bevindt zich de boot?

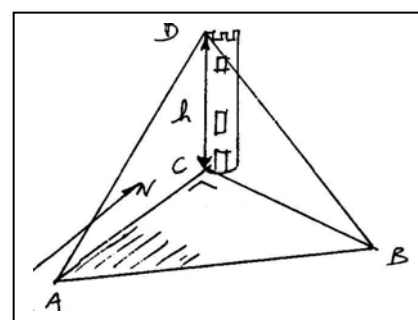
Opl. Afstand = 40.  $1/\text{tg } 15^\circ = 148 \text{ m}$ .

6. Vind de hoogte van een boom, wetende dat de hoek waaronder men de top ervan ziet, verandert van  $20^\circ$  tot  $40^\circ$  wanneer de waarnemer 25 m naar de voet ervan toeloopt (zie figuur).



Opl.  $DC = CB \cdot 1/\text{tg } 20^\circ - 25$ , dus:  $CB = 25/1,5 = 16,6 \text{ m}$ .

7. Een toren bevindt zich op een vlak terrein ten Noorden van een punt A en ten Westen van een punt B dat zich op C meter van A bevindt. Vind de hoogte h van de toren, als men weet dat de hoeken waaronder men de top van de toren ziet vanuit A en B respectievelijk  $\alpha$  en  $\beta$  zijn (zie figuur).

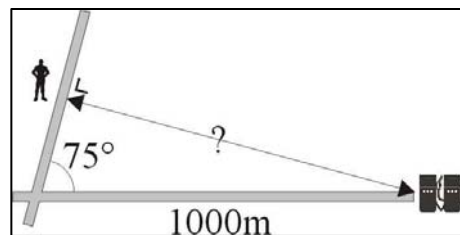


Opl. Omdat  $AC = h/\text{tg } \alpha$  en  $BC = h/\text{tg } \beta$ , is  $(AC)^2 + (BC)^2 = h^2 \cdot (1/\text{tg}^2 \alpha + 1/\text{tg}^2 \beta)$ , zodat  $h = C/\sqrt{(1/\text{tg}^2 \alpha + 1/\text{tg}^2 \beta)}$ .

8. Men moet een aantal gaatjes op regelmatige afstand van elkaar boren op de omtrek van een cirkel. Toon aan dat de afstand d tussen 2 opeenvolgende dergelijke gaatjes gegeven is door  $d = 2r \cdot \sin 180^\circ/n$ , waar r de straal van de cirkel is en n het aantal gaatjes.

9. Twee wegen kruisen elkaar onder een hoek van  $75^\circ$ . Vind de kortste weg tot één van de twee wegen naar een benzinstation op de andere weg gesitueerd op 1000 m van het kruispunt.

Opl.  $1000 \cdot \sin(75^\circ) = 970 \text{ m}$ .



10. Twee gebouwen met een plat dak zijn 30 m van elkaar verwijderd. Vanaf het dak van het laagste gebouw is de hoek waaronder men de rand van het hoogste gebouw ziet  $40^\circ$ . Hoeveel hoger is het hoogste gebouw dan het laagste?

Opl. 25 m.

11. Een ladder met een lengte van 0,30 staat rechtop tegen muur. Als het bovenste stuk over een afstand van 0,06 langs de muur naar beneden glijdt, hoe ver zal het onderste eind van de muur wegschuren.

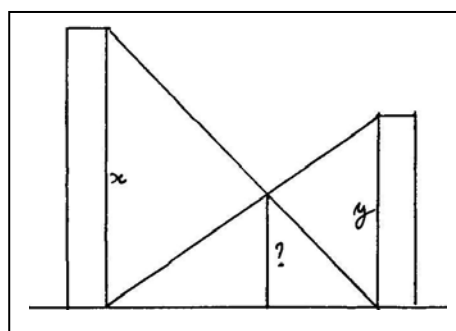
Opl. Rechthoekige driehoek; hypotenusus 0,30; één zijde  $0,30 - 0,06 = 0,24$ . De derde zijde meet dus 0,18.

12. Een ladder waarvan de voet rust op de stoep, maakt een hoek van  $30^\circ$  met de straat, wanneer het andere uiteinde tegen een gebouw steunt aan de rand van de straat, en een hoek van  $40^\circ$  met de straat wanneer het andere uiteinde steunt tegen een gebouw aan de andere zijde van de straat. Als de ladder 15 m lang is, wat is dan de breedte van de straat?

Opl. 24,6 m.

13. Een Indiase puzzel. Het Bhaksali handschrift werd in 1881 in noordwest-India gevonden en dateert uit een periode ergens tussen de derde en de twaalfde eeuw. Het volgende vraagstuk is echter afkomstig uit Mahavira's "Gasita-Sara-Sangraha". Van twee zuilen is de hoogte bekend. Aan de top van elke zuil wordt een draad vastgeknoopt. Elke draad wordt zo opgespannen dat hij de voet van de andere zuil raakt. Vanaf het punt waar beide draden elkaar snijden wordt een andere draad vastgemaakt die naar beneden hangt en de grond raakt. Wat is de lengte van deze draad (zie figuur)?

Opl. Mahavira geeft de afstand tussen de zuilen niet omdat dat voor de oplossing niet nodig is. De gezochte hoogte is de helft van het harmonische middenevenredige van de gegeven hoogte:  $1/(1/x+1/y) = xy/(x+y)$ . Ter vergelijking:  $(x+y)/2$  is het rekenkundig (aritmetisch) gemiddelde van  $x$  en  $y$ , en  $\sqrt{xy}$  het meetkundig gemiddelde.



**HET OPLOSSEN VAN EEN DRIEHOEK** is een klassiek probleem dat erin bestaat de onbekende hoek(en) en zijde(n) berekenen, wanneer men over enige informatie over deze driehoek heeft. Vraagt men bijvoorbeeld de driehoek ABC op te lossen waarin  $a = 43,9$  en  $b = 24,3$  ( $C = 90^\circ$ ), dan berekent men:

- A uit  $\cotg A = 43,9/24,3 = 1,8066$ :  $A = 61^\circ 2'$ ;
- B uit  $90^\circ - A = 28^\circ 58'$ ;
- c uit  $c/a = 1/\sin A$ , dus  $c = 43,9/0,8749 = 50,2$ .

Voorbeeld: de rechthoekige driehoek ABC oplossen, waarin  $b = 15,25$  en  $c = 32,68$  (en  $C = 90^\circ$ ).

Opl. Uit  $\sin B = 15,25/32,68 = 0,4666$  volgt  $B = 27^\circ 49'$ ;

Verder zijn  $A = 90^\circ - B = 62^\circ 11'$  en  $a = b \cotg B = 28,90$ .

### OEFENINGEN.

1. Bereken de straal  $r$  van de 40ste parallel, in de veronderstelling dat de aarde een bol is met een straal van 6373km.

Opl. 4882km.

2. Vind de omtrek van een regelmatige achthoek ingeschreven in een cirkel met straal 150 m.

Opl. 918m.

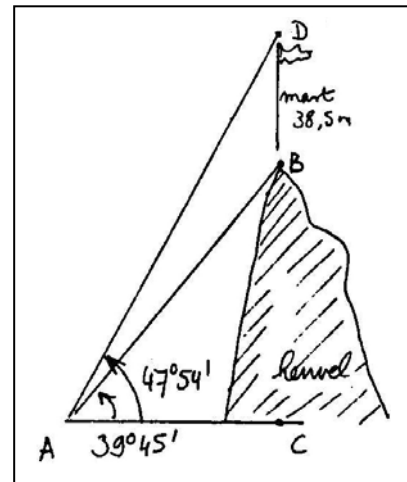
3. Vanuit een punt A gelegen op een vlak terrein, zijn de hoeken waaronder men de top D ziet en de voet B van een mast boven op een heuvel volgens de metingen  $47^{\circ}54'$  en  $39^{\circ}45'$ . Vind de hoogte van de heuvel als de mast 38,5m meet (zie figuur).

Opl.

In de driehoek ACD is  $AC = (38,5 + BC) \cdot \cotg 47^{\circ}54'$

In driehoek ACB is  $AC = BC \cdot \cotg 39^{\circ}45'$ .

Bijgevolg is  $BC = 38,5 \cdot 0,9036 / (1,2024 - 0,9036) = 116,4\text{m}$ .



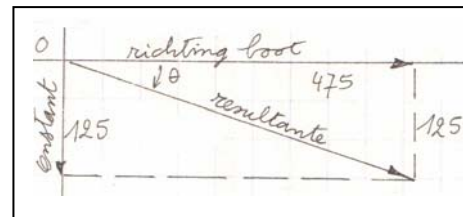
4. Een motorboot verplaatst zich in de richting  $N40^{\circ}O$  gedurende 3 uur aan een snelheid van 20 km/u. Hoeveel verplaatst hij zich naar het Noorden en hoeveel naar het Oosten ?

Opl. 46 km noordwaarts, en 39 oostwaarts.

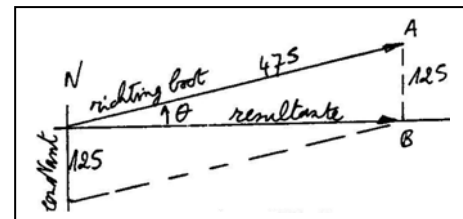
5. Een rivier stroomt zuidwaarts aan 125m/min. Een motorboot verplaatst zich aan 475 m/min. in kalm water, en wordt recht naar het oosten gericht om de andere oever van de rivier te bereiken. Vind de richting waaronder de boot zich verplaatst en ook zijn snelheid. In welke richting moet de boot worden gericht opdat hij zich wel degelijk recht naar het oosten zou richten en wat zal dan zijn snelheid zijn in deze richting ?

Opl.

Zie figuur. In de driehoek OAB berekenen we  $OB = \sqrt{(475^2 + 125^2)}$   
 $= 491$  en vervolgens  $\text{tg } \theta$  uit  $\text{tg } \theta = 125/475 = 0,2632$ , zodat  $\theta = 14^{\circ}40'$ . De boot verplaatst zich dus aan 491 m/min in de richting  $Z 75^{\circ}20' O$ .



In een gelijkaardige figuur voor de nieuwe situatie berekenen we  $\sin \theta = 125/475 = 0,2632$  zodat  $\theta = 15^{\circ}20'$ . Het bootje volgt dus de richting  $N 74^{\circ}40' O$  en zijn snelheid in deze richting is  $OB = \sqrt{(475^2 - 125^2)} = 458$  m/min.



6. Een paal wordt verticaal gehouden door middel van een touw. Het maakt een hoek van  $25^{\circ}$  met deze paal en oefent een trekkracht uit van  $F = 300$  N op het uiteinde. Vind de componenten  $F_h$  (horizontaal) en  $F_v$  (verticaal) van de trekkracht  $F$ .

Opl.

$F_h = 300 \sin 25^{\circ} = 127$  N, en  $F_v = 300 \cos 25^{\circ} = 272$  N.

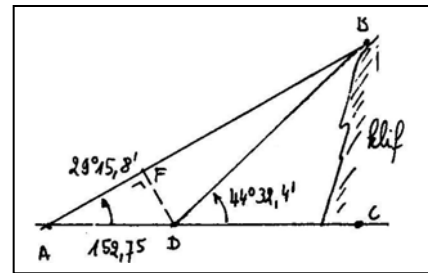
7. Een blok weegt  $W = 500$  N en rust op een schuin vlak dat een hoek van  $29^{\circ}$  maakt met de horizontale. Vind de kracht die het blok ertoe brengt zich volgens het schuine vlak te bewegen en de kracht uitgeoefend door het blok op het schuine vlak. Wat moet de minimale kracht zijn om het blok het glijden te beletten?

Opl.

Ontbinden in componenten:  $F_{//} = 242$  N en  $F_{\perp} = 437$  N.

242N volstaat dus om het glijden te beletten.

8. Om de hoogte te bepalen van een ontoegankelijke klif BC worden 2 punten A en D op de vlakke vóór de klif gefixeerd, op een afstand van 152,75m. Vanaf D is de hoek waaronder men de top van de klif ziet  $44^{\circ}32,4'$ , terwijl die vanuit A gelijk is aan  $29^{\circ}15,8'$ . Wat is de hoogte van deze klif ten opzichte van deze vlakke (zie figuur)?



Opl.

Formulewerk levert:  $CB = AD / (\cotg BAC - \cotg BDC) = 198,77$  m.

Het bijhorende rekenwerk gaat als volgt:  $29^{\circ}15,8' = 29,2633\dots$  waarvan de tangens  $0,5603326\dots$  is en dus de  $\cotg BAC = 1,78465\dots$

Op dezelfde wijze  $44^{\circ}32,4' = 44,54$  dus  $BDC = .98407\dots$  zodat  $\cotg BDC = 1,01618\dots$

Dus is  $CB = 198,77$ .

Het "formulewerk" kan men vermijden door eerst  $FD = 74,6679\dots$  te berekenen, zodat  $BD = 283,39$  (de hoek  $ABD = 15^{\circ}16,6$ ) en weer  $BC = 198,77$ . Bij gebrek aan inspiratie in het formulewerk, kan men er op los rekenen, en zoveel driehoekjes oplossen tot wanneer men genoeg gegevens verkrijgt.

## Chapter 26 - 30: Reduction to Functions of Positive Acute Angles: Herleiding naar Functies van Positieve Scherpe Hoeken.

$\sin(\theta+n.360^\circ) = \sin\theta$	$\cos(\theta+n.360^\circ) = \cos\theta$	$\text{tg}(\theta+n.360^\circ) = \text{tg}\theta$
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\text{tg}(-\theta) = -\text{tg}\theta$
$\sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta$	$\cos(90^\circ-\theta) = \sin\theta$	$\text{tg}(90^\circ-\theta) = \text{cotg}\theta$
$\sin(90^\circ+\theta) = \cos\theta$	$\cos(90^\circ+\theta) = -\sin\theta$	$\text{tg}(90^\circ+\theta) = -\text{cotg}\theta$
$\sin(180^\circ-\theta) = \sin\theta$	$\cos(180^\circ-\theta) = -\cos\theta$	$\text{tg}(180^\circ-\theta) = -\text{tg}\theta$
$\sin(180^\circ+\theta) = -\sin\theta$	$\cos(180^\circ+\theta) = -\cos\theta$	$\text{tg}(180^\circ+\theta) = \text{tg}\theta$
$\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$	$1+\text{tg}^2\theta = 1/\cos^2\theta$	$1+\text{cotg}^2\theta = 1/\sin^2\theta$

Verder geldt (de volgende formules dient men niet te memoriseren):

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta$	$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta$	$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta$
$\text{tg}(\alpha+\beta) = (\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta)/(1-\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta)$	$\text{tg}(\alpha-\beta) = (\text{tg}\alpha-\text{tg}\beta)/(1+\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta)$

$\sin 2\alpha = 2.\sin\alpha.\cos\alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 1-2.\sin^2\alpha = 2.\cos^2\alpha-1$
$\text{tg} 2\alpha = 2\text{tg}\alpha/(1-\text{tg}^2\alpha)$	

Gevolgen

1. Toon aan dat

$$\begin{aligned}\sin\alpha.\cos\beta &= [\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]/2 \\ \cos\alpha.\sin\beta &= [\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]/2 \\ \cos\alpha.\cos\beta &= [\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]/2 \\ \sin\alpha.\sin\beta &= -[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]/2\end{aligned}$$

2. Toon aan dat voor de drie hoeken van een willekeurige driehoek geldt

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$$

## Chapter 31: Oblique Triangles: schuine (willekeurige) driehoeken.

Sinusregel

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Cosinusregel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

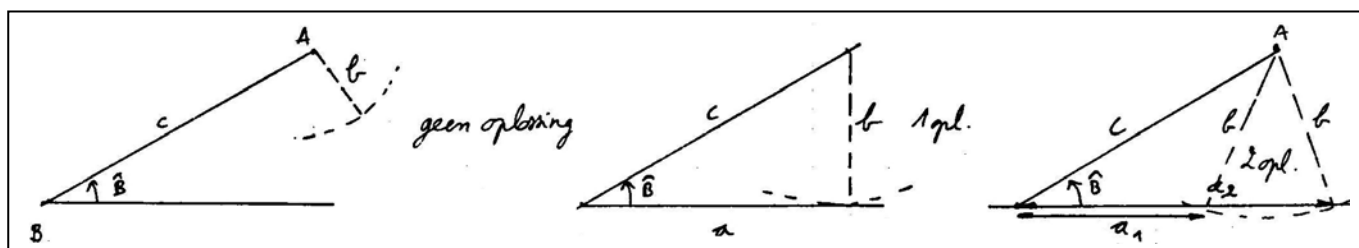
Net zoals voor rechthoekige driehoeken bestaat hier het vraagstuk van het "oplossen van driehoeken". Er zijn verscheidene deelgevallen:

- 1 zijde en 2 hoeken zijn gegeven;
- 2 zijden en een tegenovergestelde hoek zijn gegeven;
- 2 zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven;
- 3 zijden zijn gegeven.

In gevallen a en b gebruikt men de sinusregel, in gevallen c en d de cosinusregel.

Het is mogelijk geen, één of verscheidene oplossingen te verkrijgen. Beschouwen we bijvoorbeeld het tweede geval, waarbij de zijden  $b$  en  $c$  gegeven zijn en de hoek  $B$ . Indien  $B$  scherp is, kan men de volgende tekeningen onderscheiden (figuren!):

geen oplossing; precies één oplossing; twee oplossingen.



Andere interessante gevallen zijn  $b = c$  en  $B$  scherp, of het geval waarin  $B$  een stompe hoek is.

## OEFFENINGEN

1. Een piloot wenst een koers te volgen van  $15^{\circ}0'$  rekening houdend met een wind van  $25\text{ km/h}$  uit een richting van  $160^{\circ}30'$ . Vind de koers die hij moet uitzetten, en ook zijn snelheid, tegenover de grond, als geweten is dat de snelheid van het vliegtuig tegenover de lucht  $175\text{ km/h}$  is (= de aëroodynamische snelheid).

Opl.

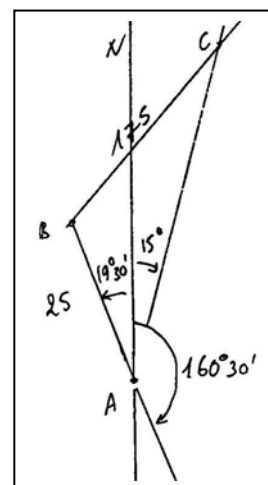
Zie figuur: in de driehoek ABC kent men 3 elementen: 1 hoek (A), en 2 zijden: c en a.

Omdat A scherp is, en  $a > c$  is er slechts één oplossing

$$\sin C = c \cdot \sin A / a = 25 \cdot \sin 34^{\circ}30' / 175 = 0,0809 \dots \text{ en } C = 4^{\circ}40';$$

$$B = 180^{\circ} - (A + C) = 140^{\circ}50';$$

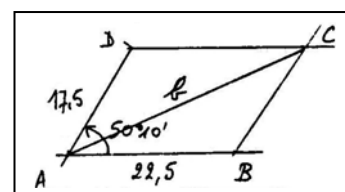
$$b = a \cdot \sin B / \sin A = 175 \cdot \sin 140^{\circ}50' / \sin 34^{\circ}30' = 195.$$



2. Twee krachten van  $17,5\text{ N}$  en  $92,5\text{ N}$  worden op een lichaam uitgeoefend. Als hun richtingen een hoek van  $50^{\circ}10'$  maken met elkaar, vind dan de grootte van hun resultante en de hoek die ze maakt met de grootste van de twee krachten.

Opl.

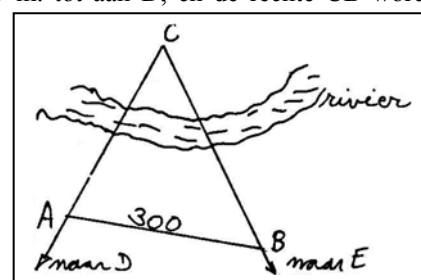
Zie figuur. In het parallellogram ABCD is  $A + B = C + D = 180^{\circ}$ . Dus is  $B = 180^{\circ} - 50^{\circ}10' = 129^{\circ}50'$ . In de driehoek ABC is  $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B = 1317$  zodat  $b = 36,3$ . Verder is  $\sin A = a \cdot \sin B / b = 17,5 \cdot 0,7679 \dots / 36,3 = 0,3702 \dots$  zodat  $A = 21^{\circ}43'$ .



3. Men wil de kortste afstand bepalen van een punt C naar twee punten A en B maar men kan ze niet rechtstreeks afmeten. De rechte CA wordt vanuit A verlengd met  $175\text{ m}$ . tot aan D, en de rechte CB wordt verlengd vanuit B met  $225\text{ m}$ . tot aan E en de afstand  $AB = 300\text{ m}$ ,  $DB = 326\text{ m}$  en  $DE = 488\text{ m}$ . Vind de afstanden AC en BC.

Opl.

De herhaalde toepassingen van de cosinusregel levert  $\angle BAD = 82^{\circ}10'$ ,  $\angle ABD = 32^{\circ}10'$  en  $\angle DBE = 123^{\circ}40'$ , zodat alle hoeken van de driehoek ABC bekend zijn.  $\angle BAC = 97^{\circ}50'$ ,  $\angle ABC = 24^{\circ}10'$   $\angle ACB = 58^{\circ}0'$ . Dus is met de sinusregel  $AC = 145$  en  $BC = 350$ .



4. Twee krachten van  $115\text{ N}$  en respectievelijk  $215\text{ N}$  worden op een voorwerp uitgeoefend en hebben als resultante  $275\text{ N}$ . Vind de hoek tussen deze krachten.

Opl.  $70^{\circ}50'$ .

5. Een toren van  $150\text{ m}$  hoog bevindt zich boven op een heuvel. In een punt op  $650\text{ m}$  van de top op de heuvel is de hoek gedefinieerd door het vlak van de heuvel en de gezichtslijn naar de top van de toren  $12^{\circ}30'$ . Vind de helling van de heuvel ten opzichte van de horizontale.

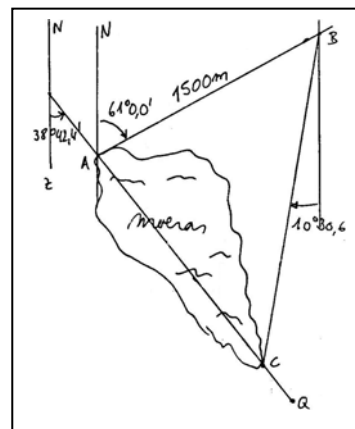
Opl.  $7^{\circ}50'$ .

6. Drie cirkels met stralen 115, 150 en 225 m. raken elkaar twee aan twee, aan de buitenzijde. Vind de hoeken van de rechten die de middelpunten van de cirkels verbinden.

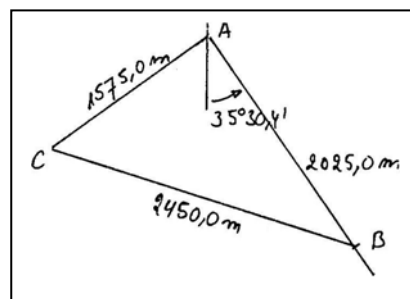
Opl.  $43^{\circ}10'$ ,  $61^{\circ}20'$  en  $75^{\circ}30'$ .

7. Terwijl hij een rechte PQ uitzet volgens de richting  $Z 38^{\circ}42,4' O$  vanuit het punt P, ontmoet een landmeter een moeras. In een punt A van de rechte op de oever van het moeras verandert hij van richting en volgt een kaap  $N 61^{\circ}0,0' O$  over een afstand van 1500,0 m tot aan een punt B. Hij viseert vervolgens de andere oever van het moeras in de richting  $Z 10^{\circ}30,6' W$ . Deze rechte snijdt PQ in een punt C. Vind de afstand BC, de lengte AC van het moeras.

Opl.  $BC = 1952,7$  m, en  $1528,4$  m.



8. Een driehoekig veld heeft als afmetingen 2025,0 m., 2450,0 m. en 1575 m. De oriëntatie van de zijde AB is  $Z 35^{\circ}30,4' O$ . Vind de oriëntatie van de andere zijden.



9. Aantonen dat de oppervlakte  $K$  van het deel van een cirkelvormige schijf met straal  $r$  en middelpunt  $O$  begrensd door de koorde  $AB$  en de cirkelboog gegeven wordt door  $K = r^2(\theta - \sin\theta)/2$  waarin  $\theta$  de hoek is gemeten in radialen onderschept door de cirkelboog.

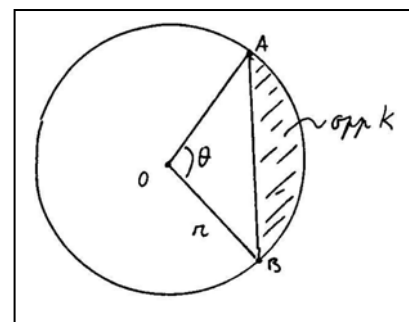
Opl. Zie figuur.

$K = \text{sector OAB} - \text{Opp. driehoek OAB}$

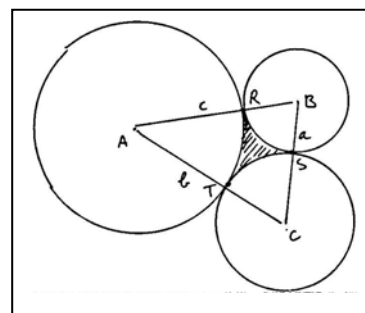
$$= r^2\theta/2 - r^2 \sin\theta /2 = r^2(\theta - \sin\theta)/2.$$

Hierbij kan men de uitdrukking voor de oppervlakte van de sector OAB eenvoudig opstellen door "een regel van drie". Als de hoek die de boog AB van de cirkel onderschept niet  $\theta$  is maar  $2\pi$ , dan is  $K = r^2\pi$  de oppervlakte van de cirkel.

Dus:      hoek in O is  $2\pi$  (rad)       $\rightarrow K = r^2\pi$ ;  
             hoek in O is 1 (rad)           $\rightarrow K = r^2\pi/(2\pi)$ ;  
             hoek in O is  $\theta$  (rad)          $\rightarrow K = r^2\pi/2$ .



10. Drie cirkels met middelpunten A, B en C hebben als stralen respectievelijk 50, 30 en 20 cm en raken aan elkaar aan de buitenzijde twee aan twee. Vind de oppervlakte van de kromlijnige "driehoek" gevormd door deze drie cirkels (zie figuur).

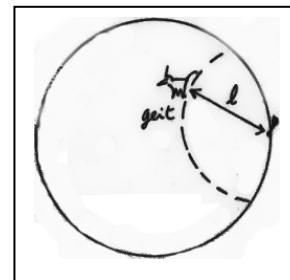


Opl.

Opp. driehoek  $ABC = \sqrt{(100 \cdot 50 \cdot 30 \cdot 20)} = 1732$ , want  $a=50$ ,  $b=70$ ,  $c=80$  en  $s = (a+b+c)/2 = 100$ . Vervolgens bepaalt men  $A = 38^\circ 12' = 0,66\dots$  rad,  $B = 60^\circ 0' = 1,047\dots$  rad en  $C = 81^\circ 48' = 1,428\dots$  rad. Bijgevolg is de sector  $RAI = 50^2 \cdot 0,66\dots / 2 = 833,75$ , de sector  $RBS = 471,15\dots$  en de sector  $TCS = 285,60$  en de som van de oppervlakten van al deze sectoren is  $1590,50$ . De gezochte oppervlakte is bijgevolg  $1732 - 1590,50 = 141,50$   $\text{cm}^2$ .

11. Het volgende vraagstuk is meer dan een eeuw oud en kan in vele puzzelboeken en tijdschriften worden gevonden, met varianten.

Een geit graast op een cirkelvormig grasperk, maar is vastgebonden aan een touw met lengte  $l$  dat aan het andere uiteinde verbonden is met een stok geplaatst op de rand van de cirkel. Bepaal de lengte van het touw zodat de geit precies de helft van het gras heeft gegeten.



## Chapter 32: Inverse Trigonometrische functies: Inverse trigonometrische functies.

Voor inverse functies van  $y = \sin(x)$ ,  $y = \cos(x)$  en  $y = \text{tg}(x)$  noteert men  $y = \text{Bgsin}(x)$ ,  $y = \text{Bgcos}(x)$  en  $y = \text{Bgtg}(x)$  maar ook de notaties  $\arcsin(x)$  of  $\sin^{-1}x$  (enz.) worden gebruikt. Men neemt  $\text{Bgsin}(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\text{Bgcos}(x) \in [0, \pi]$  en  $\text{Bgtg}(x) \in ]-\pi/2, \pi/2[$ . Sommige rekenmachines gebruiken de afkortingen ASIN, ACOS en ATAN voor deze inverse functies. Opgelet dus,  $(\text{TAN } \pi/6)^{-1} = \dots$ , terwijl  $\text{ATAN } \pi/6 = \dots$  en  $\text{COT } \pi/6 = \dots$ . Denk dus niet dat COT en ATAN hetzelfde zijn, of dat de cotangens verkregen wordt door de combinatie van "shift" en "tan" (althans, op geen enkele rekenmachine geproduceerd tot vandaag is dit zo).

### Oefeningen

1. Toon aan dat  $\text{Bgtg}1/2 + \text{Bgtg } 1/5 + \text{Bgtg}1/8 = \pi/4$ .

2. Toon aan dat a)  $\text{bgsin}(x) = n\pi + (-1)^n \text{Bgsin}(x)$

b)  $\text{bgcos}(x) = 2n\pi + \text{Bgcos}(x)$

c)  $\text{bgtg}(x) = n\pi + \text{Bgtg}(x)$

waarbij  $\text{bgsin}(x)$ ,  $\text{bgcos}(x)$  en  $\text{bgtg}(x)$  "algemene" waarden zijn zodat  $x = \text{siny}$ ,  $x = \text{cosy}$  en  $x = \text{tgy}$  die niet noodzakelijk tot  $[-\pi/2, \pi/2]$ ,  $[0, \pi]$  of  $]-\pi/2, \pi/2[$  behoren.

### 3. Enige klassieke oefeningen

a) Bereken  $\text{tg}(\text{Bgsin}0)$ ,  $\text{Bgsin}(\cos(-105^\circ))$ ,  $\sin(\text{Bgcos}(4/5) / 2)$ .

b) Toon aan dat  $\text{tg}(\text{Bgtg}3/4 + \text{Bgcotg}15/8) = 77/36$ .  
 $\sin(2\text{Bgsin}4/5 - \text{Bgcos}12/13) = 323/325$ .

c) Toon aan dat  $\text{Bgsin}3/5 + \text{Bgsin}15/17 = \text{Bgsin}-13/85$ .

Opl (a)  $0, -15^\circ, 1/\sqrt{10}$ .

4. Bereken een  $\text{Bgcotg}$  met Uw rekenmachine.

## Chapter 33: Trigonometric Equations: niet kennen.