

(HOOFDSTUK 12, uit "College Mathematics", door Frank Ayres, Jr. and Philip A. Schmidt, Schaum's Series, McGraw-Hill, New York; dit is de voorbereiding voor een uit te geven Nederlandse vertaling; het deel over hyperbolische functies komt uit hoofdstuk 20).

Machtsfuncties, Exponentiële, en Logaritmische Krommen

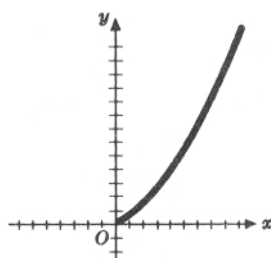
MACHTSFUNCTIES in x zijn van de vorm x^n . Als $n > 0$, heet de grafiek van $y = x^n$ van het *parabolische* type (de kromme is een parabool voor $n = 2$). Als $n < 0$, heet de grafiek van $y = x^n$ van het *hyperbolische* type (de kromme is een hyperbool voor $n = -1$).

VOORBEELD 1. Teken de grafieken van (a) $y = x^{3/2}$, (b) $y = -x^{-3/2}$.

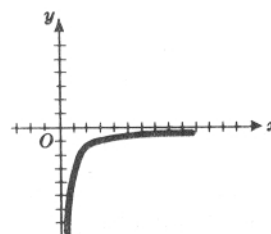
Tabel 12.1 werd uitgerekend voor enkele waarden van x . We zullen veronderstellen dat de punten van de tussenliggende waarden van x liggen op een vloeiende kromme die de punten verbindt gegeven in de tabel. Zie Fig. 12-1 en 12-2. (Zie oefeningen 12.1-12.3.)

x	$y = x^{3/2}$	$y = -x^{-3/2}$
9	27	$-\frac{1}{27}$
4	8	$-\frac{1}{8}$
1	1	-1
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	-8
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	-27
0	0	—

Tabel 12.1



$y = x^{3/2}$
Fig. 12-1



$y = -x^{-3/2}$
Fig. 12-2

EXPONENTIËLE FUNCTIES in x zijn van de vorm b^x waarin b een constante is. De bespreking wordt hier beperkt tot het geval $b > 1$.

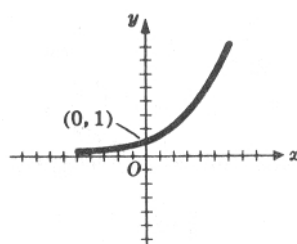
De kromme waarvan de vergelijking $y = b^x$ is, wordt een *exponentiële kromme* genoemd. Algemene eigenschappen van zulke krommen zijn

- (a) De kromme gaat door het punt $(0,1)$.
- (b) De kromme ligt boven de x -as en heeft die as als asymptoot.

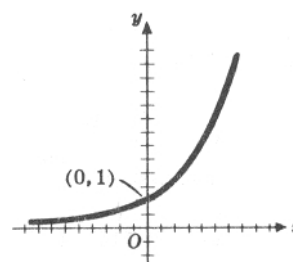
VOORBEELD 2. Teken de grafiek van de (a) $y = 2^x$, (b) $y = 3^x$. (Zie Oefening 12.4.)

x	$y = 2^x$	$y = 3^x$
3	8	27
2	4	9
1	2	3
0	1	1
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$
-3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$

Tabel 12.2



$y = 2^x$
Fig. 12-3



$y = 3^x$
Fig. 12-4

De exponentiële vergelijking komt dikwijls voor in de vorm $y = c \cdot e^{kx}$ waarin c en k niet-nul constanten zijn en $e = 2,71828\dots$ de basis van de natuurlijke logaritmen is. Zie Tabel 12.2 en Fig.12-3 en 12-4. (Zie Oefeningen 12.5-12.6.)

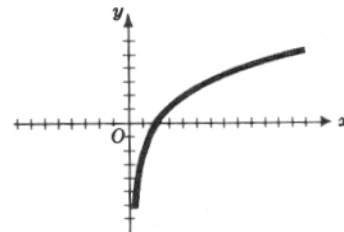
DE KROMME WAARVAN DE VERGELIJKING IS $y = \log_b x$, $b > 1$, wordt een *logaritmische kromme* genoemd. Algemene eigenschappen zijn

- (a) De kromme gaat door het punt $(1,0)$.
- (b) De kromme ligt rechts van de y -as en heeft die as als asymptoot.

VOORBEELD 3. Teken de grafiek van $y = \log_2 x$.

x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
y	3	2	1	0	-1	-2	-3

Table 12.3



$y = \log_2 x$
Fig. 12-5

Vermits $x = 2^y$, kunnen de waarden in tabel 12.3 verkregen worden uit de tabel voor $y = 2^x$ van Voorbeeld 2 door x en y om te wisselen. Zie Fig. 12-5. (Zie Oefening 12.7.)

OPGELOSTE OEFENINGEN

12.1 Teken de grafiek van de *semicubische parabool* $y^2 = x^3$.

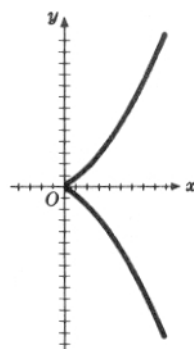
Vermits de gegeven vergelijking equivalent is aan $y = \pm x^{3/2}$, bestaat de grafiek van de kromme uit de kromme bekomen in Voorbeeld 1(a) samen met de spiegeling ervan rondom de x -as. Zie Fig. 12-6.

12.2 Teken de grafiek van $y^3 = x^2$.

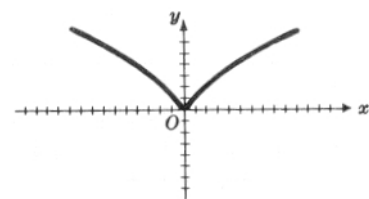
Verwijs naar Fig. 12-7 en Tabel 12.4.

x	± 3	± 2	± 1	0
y	2.1	1.6	1	0

Tabel 12.3



$y^2 = x^3$
Fig. 12-6



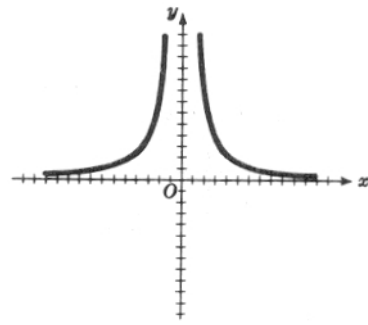
$y^3 = x^2$

Fig. 12-7

12.3 Teken de grafiek van $y = x^{-2}$.
Zie Fig. 12-8 en Tabel 12.5.

x	± 3	± 2	± 1	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{4}$	0
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	—

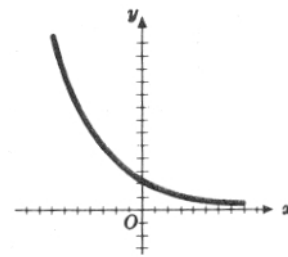
Tabel 12.5


 $y = x^{-2}$
Fig. 12-8

12.4 Teken de grafiek van $y = 3^{-x}$.
Zie Fig. 12-9 en Tabel 12.6.
Merk op dat de grafiek van $y = b^{-x}$ de spiegeling is om y -as van de grafiek of $y = b^x$.

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
y	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

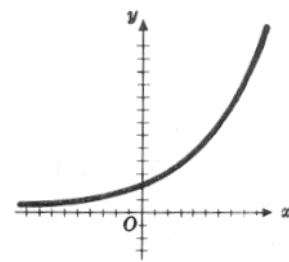
Tabel 12.6


 $y = 3^{-x}$
Fig. 12-9

12.5 Teken de grafiek van $y = e^{2x}$.
Zie Fig. 12-10 en Tabel 12.7.

x	2	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-2
$y = e^{2x}$	54.6	7.4	2.7	1	0.4	0.14	0.02

Tabel 12.7

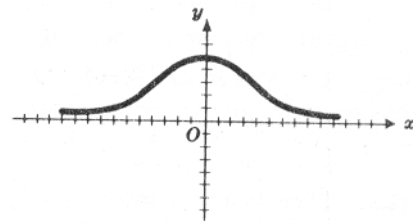

 $y = e^{2x}$
Fig. 12-10

12.6 Teken de grafiek van $y = e^{-x^2}$

Verwijs naar Fig. 12-11 en Tabel 12.8.

x	± 2	$\pm \frac{3}{2}$	± 1	$\pm \frac{1}{2}$	0
y	0.02	0.1	0.4	0.8	1

Tabel 12.8



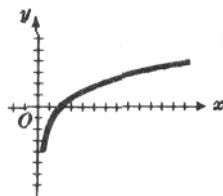
$y = e^{-x^2}$
Fig. 12-11

Het is een vereenvoudigde vorm van de *normale verdeling* of *kromme van Gauss*, die gebruikt wordt in de statistiek.

12.7 Teken, voor $x > 0$, de grafieken van (a) $y = \log x$, (b) $y = \log x^2 = 2 \log x$.

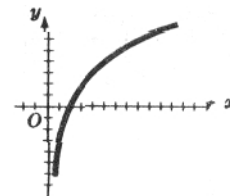
Zie Tabel 12.9 en Figuren 12-12 en 12-13.

x	10	5	4	3	2	1	0.5	0.25	0.1	0.01
$y = \log x$	1	0.7	0.6	0.5	0.3	0	-0.3	-0.6	-1	-2
$y = \log x^2$	2	1.4	1.2	1	0.6	0	-0.6	-1.2	-2	-4



$y = \log x$

Fig. 12.12



$y = \log x^2$

Fig. 12-13

SUPPLEMENTAIRE OEFENINGEN

12.8 Teken de grafieken van (a) $y^2 = x^{-3}$, (b) $y^3 = x^{-2}$, (c) $y^2 = 1/x$, (d) de kubische 'parabool' $y = x^3$.

12.9 Teken de grafieken van

- | | | | |
|-------------------|---------------------------|--------------------|-------------------|
| (a) $y = (2,5)^x$ | (c) $y = 2^{-1/x}$ | (e) $y = e^{x/2}$ | (g) $y = e^{x+2}$ |
| (b) $y = 2^{x+1}$ | (d) $y = \frac{1}{2} e^x$ | (f) $y = e^{-x/2}$ | (h) $y = xe^{-x}$ |

12.10 Teken de grafieken van (a) $y = \frac{1}{2} \log x$, (b) $y = \log(3x+2)$, (c) $y = \log(x^2+1)$.

12.11 Toon aan dat de kromme $y^q = x^p$, waar p en q positieve gehele getallen zijn, volledig ligt in
 (a) kwadranten I en III als p en q beiden oneven zijn;
 (b) kwadranten I en IV als p oneven is en q even is;
 (c) kwadranten I en II if p even is en q oneven is.

12.12 Toon aan dat de kromme $y^q = x^{-p}$, waar p en q positieve gehele getallen zijn, volledig ligt in
 (a) kwadranten I en III als p en q beiden oneven zijn;
 (b) kwadranten I en II als p even is en q oneven is;
 (c) kwadranten I en IV if p oneven is en q even is.

HYPERBOLISCHE FUNCTIES. Zij x een willekeurig reëel getal, dan definieert behalve in de vermelde gevallen, de hyperbolische functies als:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \operatorname{th} x &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \operatorname{coth} x &= \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, x \neq 0 \end{aligned}$$

Soms worden de notaties $\sinh x$ en $\cosh x$ gebruikt.

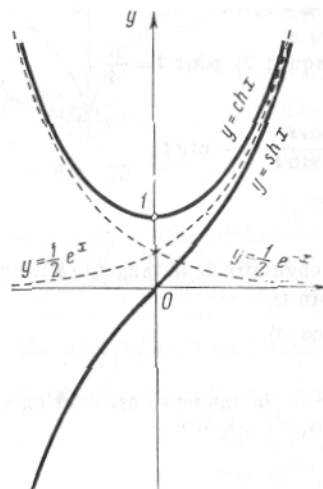
OEFENINGEN

1. Toon aan dat $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$

$$\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2u} + 2 + e^{-2u}) - \frac{1}{4} (e^{2u} - 2 + e^{-2u}) = 1.$$

2. (a) Maak de grafieken van de krommen $y = e^x$ en $y = -e^{-x}$, en maak de gemiddelden van de tweede coördinaten voor verschillende waarden van x ten einde punten te verkrijgen van $y = \operatorname{sh} x$. Vervolledig de kromme.

(b) Ga te werk zoals bij de vorige oefening, maar nu met $y = e^x$ en $y = e^{-x}$ ten einde de grafiek te verkrijgen van $y = \operatorname{ch} x$.

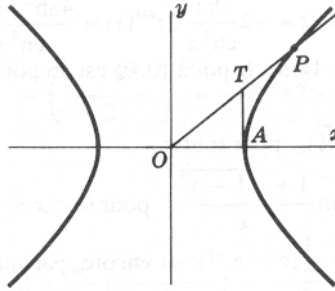


3. Bepaal de coördinaten van het minimum van de *kettinglijn* $y = a \operatorname{ch}(x/a)$.

Op de grafiek van de hyperbolische cosinus (zie vorige oefening), ziet men dat het minimum ligt in het punt $x = 0$. Daar is $\operatorname{ch}(0/a) = \frac{e^{0/a} + e^{-0/a}}{2} = 1$ zodat het punt $(0, a)$ het minimum is.

4. Toon aan dat voor de hyperbool $x^2 - y^2 = 1$ (vgl. fig.):

- (a) $P(\operatorname{ch} u, \operatorname{sh} u)$ een punt is van de hyperbool;
- (b) de raaklijn in A de rechte OP snijdt in $T(1, \operatorname{th} u)$;
- (c) vergelijk dit met de situatie voor een punt op een cirkel.



22. Aantonen:
- (a) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x \operatorname{sh}y$
 - (b) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y$
 - (c) $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh}x \operatorname{ch}x$
 - (d) $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2x + \operatorname{sh}^2x = 2 \operatorname{ch}^2x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2x + 1$
 - (e) $\operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th}x}{1 + \operatorname{th}^2x}$