

# Integratie

**DE ONBEPAAALDE INTEGRaal VAN  $f(x)$**  wordt genoteerd met  $\int f(x)dx$ , en is de meest algemene zogenaamde *primitieve van  $f(x)$*  – dat is:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

waarbij  $F(x)$  elke functie is zodanig dat  $F'(x) = f(x)$  en  $C$  een willekeurige constante is. Dus, de onbepaalde integraal van  $f(x) = 3x^2$  is  $\int 3x^2 dx = x^3 + C$ .

We zullen de volgende formules voor primitieven gebruiken:

$$\text{I. } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ waar } n \neq -1$$

$$\text{II. } \int cf(x)dx = c\int f(x)dx, \text{ waar } c \text{ een constante is}$$

$$\text{III. } \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

## VOORBEELD 1

$$\text{(a) } \int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C,$$

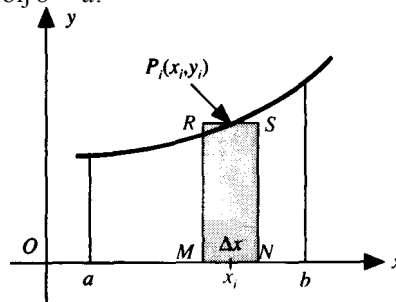
(b)  $\int 4x^3 dx = 4\int x^3 dx = 4\left[\frac{x^4}{4} + C\right] = x^4 + 4C$ , maar als we  $4C$  de naam  $C_1$  geven, dan stelt  $C_1$  nog steeds een willekeurige constante voor; dus kunnen we eenvoudigweg schrijven dat  $\int 4x^3 dx = x^4 + C$ .

$$\text{(c) } \int 3x dx = 3\int x dx = 3\frac{x^2}{2} + C = \frac{3}{2}x^2 + C$$

$$\text{(d) } \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

$$\text{(e) } \int (x^5 + 4x^3 + 3x) dx = \int x^5 dx + \int 4x^3 dx + \int 3x dx = \frac{x^6}{6} + x^4 + \frac{3}{2}x^2 + C$$

**OPPERVLAKTE DOOR INTEGREREN.** Beschouw de oppervlakte  $A$  begrensd door de kromme  $y = f(x) \geq 0$ , de  $x$  as, en de waarden  $x = a$  en  $x = b$ , waarbij  $b > a$ .



**ALS WE DEFINIËREN DAT**  $\int_a^b f(x)dx$  (lees: de *bepaalde integraal van  $f(x)$*  tussen  $x = a$  en  $x = b$ ) staat voor

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (F'(x) = f(x))$$

dan wordt de oppervlakte begrensd door  $y = f(x) \geq 0$ , de  $x$  as, en de waarden  $x = a$  en  $x = b$ , waarbij ( $b > a$ ) gegeven door

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

### Opgeloste Vraagstukken

1. (a)  $\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{1/2} + C = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$
- (b)  $\int (3x^2 + 5) dx = x^3 + 5x + C$
- (c)  $\int (5x^6 + 2x^3 - 4x + 3) dx = \frac{5}{7} x^7 + \frac{1}{2} x^4 - 2x^2 + 3x + C$
- (d)  $\int (80x^{19} - 32x^{15} - 12x^{-3}) dx = 4x^{20} - 2x^{16} + 6/x^2 + C$

2. Bepaal de oppervlakte begrensd door de rechte  $y = 4x$ , de  $x$  as, en de waarden  $x = 0$  en  $x = 5$ .

Hier is  $y \geq 0$  op het interval  $0 \leq x \leq 5$ . Dan

$$A = \int_0^5 4x dx = 2x^2 \Big|_0^5 = 50 \text{ oppervlakte-eenheden.}$$

Merk op dat we de oppervlakte gevonden hebben van een rechte driehoek waarvan de benen 5 en 20 (lengte-)eenheden zijn. Zie Fig. 48-3. De oppervlakte is  $(5)(20)/2 = 50$  oppervlakte-eenheden.

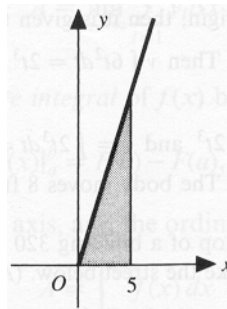


Fig. 48-3

3. Bepaal de oppervlakte begrensd door de parabool  $y = 8 + 2x - x^2$  en de  $x$  as.

De stukken onderschept op de  $x$  as zijn  $x = -2$  en  $x = 4$ ;  $y \geq 0$  op het interval  $-2 \leq x \leq 4$ . Zie Fig. 48-4.

Dus

$$A = \int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx = 8x + x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^4$$

$$= \left( 8 \cdot 4 + 4^2 - \frac{4^3}{3} \right) - \left( 8 \cdot (-2) + (-2)^2 - \frac{(-2)^3}{3} \right) = 36 \text{ oppervlakte-eenheden.}$$

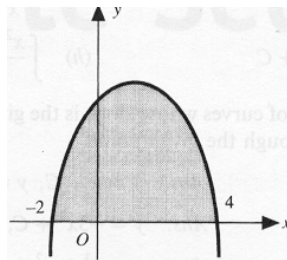


Fig. 48-4

4. Bepaal de oppervlakte begrensd door de parabool  $y = x^2 + 2x - 3$ , de  $x$ -as, en de waarden  $x = -2$  en  $x = 0$ .

Op het interval  $-2 \leq x \leq 0$ ,  $y \leq 0$ . Hier

$$A = \int_{-2}^0 (x^2 + 2x - 3) dx = \left. \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right|_{-2}^0 = 0 - \left[ \frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 - 3(-2) \right] = -22/3$$

Het minteken duidt erop dat de oppervlakte volledig onder de  $x$ -as ligt. De oppervlakte is  $22/3$  oppervlakte-eenheden. Zie Fig. 48-5.

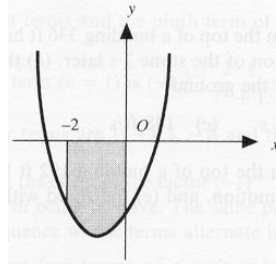


Fig. 48-5

### Aanvullende vraagstukken.

5. Bepaal de volgende onbepaalde integralen.

(a)  $\int 4 dx = 4x + C$

(b)  $\int \frac{1}{2} x dx = x^2/4 + C$

(c)  $\int (3x^2 + 4x - 5) dx = x^3 + 2x^2 - 5x + C$

(d)  $\int x(1-x) dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 + C$

(e)  $\int 3(x+1)^2 dx = (x+1)^3 + C$

(f)  $\int (x-1)(x+2) dx = x^3/3 + x^2/2 - 2x + C$

(g)  $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

(h)  $\int \frac{x-2}{x^2} dx = x + \frac{2}{x} + C$

6. Bepaal de oppervlakte begrensd door de  $x$  as, de gegeven kromme, en de aangeduide waarden.

(a)  $y = x^2$  tussen  $x = 2$  en  $x = 4$

Antw.  $56/3$  opp. eenh.

(b)  $y = 4 - 3x^2$  tussen  $x = -1$  en  $x = 1$

Antw. 6 opp. eenh.

(c)  $y = x^{1/2}$  tussen  $x = 0$  en  $x = 9$

Antw. 18 opp. eenh.

(d)  $y = x^2 - x - 6$  tussen  $x = 0$  en  $x = 2$

Antw.  $34/3$  opp. eenh.

(e)  $y = x^3$  tussen  $x = -2$  en  $x = 4$

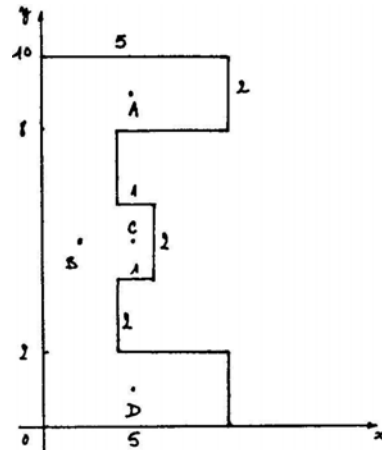
Antw. 68 opp. eenh.

(f)  $y = x^3 - x$  tussen  $x = -1$  en  $x = 1$

Antw.  $1/2$  opp. eenh.

**BEREKENING VAN HET ZWAARTEPUNT IN EENVOUDIGE GEVALLEN**

We berekenen bijvoorbeeld het zwaartepunt van de letter "E" zoals gegeven in de figuur.



De oppervlakte ervan is  $10 + 12 + 2 + 10 = 34$ .

Het zwaartepunt A van de bovenste rechthoek is  $(2,5 ; 9)$ , terwijl B de coördinaten  $(1 ; 5)$  heeft, C  $(2,5 ; 5)$ , en D  $(2,5 ; 1)$ . De momenten van deze rechthoek ten opzichte van de  $x$ -as zijn het product van de oppervlakte ervan met de afstand tot de  $x$ -as, dus:  $10 \cdot 9$ ,  $12 \cdot 5$ ,  $2 \cdot 5$  en  $10 \cdot 1$ . Het totaal is  $M_x = 170$ . Analoog is  $M_y = 10 \cdot 2,5 + 12 \cdot 1 + 2 \cdot 2,5 + 10 \cdot 2,5 = 67$ .

De  $x$ -coördinaat  $x_{zw}$  van het zwaartepunt is dus

$$x_{zw} = M_y / \text{Opp} = 67/34,$$

terwijl

$$y_{zw} = M_x / \text{Opp} = 170/34 = 5.$$

Deze werkwijze is gekend uit andere cursussen. Samengevat wordt ze

$$x_{zw} = \frac{\sum x_{zw,i} \cdot \text{Opp}_i}{\sum \text{Opp}_i} = \frac{\sum x_{zw,i} \cdot \text{Opp}_i}{\text{Totale Opp}}$$

en

$$y_{zw} = \frac{\sum y_{zw,i} \cdot \text{Opp}_i}{\sum \text{Opp}_i} = \frac{\sum y_{zw,i} \cdot \text{Opp}_i}{\text{Totale Opp}}.$$

Deze uitdrukkingen kunnen worden herschreven m.b.v. het  $\int$  teken, door te doen alsof het  $\Sigma$  teken in  $\int$  verandert (en dit is historisch gezien ook zo geweest, vermits het  $\int$ -teken een uitgetrokken s-teken is):

$$x_{zw} = \frac{\int_a^b x \cdot dx \cdot y}{\int_a^b dx \cdot y} = \frac{\int_a^b x \cdot y \cdot dx}{\int_a^b y \cdot dx} = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx}{\int_a^b f(x) \cdot dx} = M_y / \text{Opp}.$$

$$y_{zw} = \frac{\int_a^b \frac{y}{2} \cdot dx \cdot y}{\int_a^b dx \cdot y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 \cdot dx}{\int_a^b y \cdot dx} = M_x / \text{Opp}.$$

Hierin zijn  $M_x$  en  $M_y$  de zogenaamde *momenten* om de  $x$ -as en om de  $y$ -as.

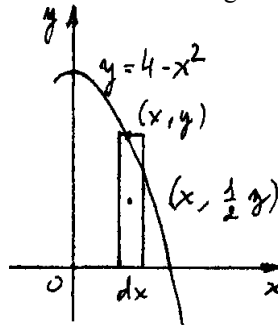
**OEFENINGEN**

1. De momenten vinden ten opzichte van de coördinaatassen van het oppervlak in het tweede kwadrant begrensd door  $y = x^2 - 9$ .

$M_y = \int_0^3 (-y \cdot dx) \cdot x$ , want  $x$  is de afstand van het zwaartepunt van die rechthoek tot de  $y$ -as, en de oppervlakte van de rechthoek is  $-y \cdot dx$ , want  $x$  is negatief, en dus komt er een minteken om een afstand te bekomen. Dus  $M_y = -\int_0^3 x \cdot (x^2 - 9) dx = 81/4$ .

Analoog  $M_x = \int_0^3 (-y \cdot dx) \cdot \frac{1}{2}y$  vermits nu  $y/2$  de afstand is tot de  $x$ -as. En dus  $M_x = -\frac{1}{2} \int_0^3 y^2 dx = -\frac{1}{2} \int_0^3 (x^2 - 9)^2 dx = \frac{324}{5}$ .

2. Het zwaartepunt vinden van de oppervlakte in het eerste kwadrant begrensd door de parabool  $y = 4 - x^2$ .



We berekenen eerst de oppervlakte  $A = \int_0^2 y dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx = \frac{16}{3}$ . De elementaire rechthoek heeft een zwaartepunt met coördinaten  $(x, y/2)$  en een oppervlakte  $y dx$  zodat

$$M_x = \int_0^2 \frac{1}{2} y \cdot y dx = \int_0^2 \frac{1}{2} (4 - x^2)^2 dx = \frac{128}{15}$$

en  $M_y = \int_0^2 x \cdot y dx = \int_0^2 x(4 - x^2) dx = 4$ .

De coördinaten van het zwaartepunt zijn dus  $x_{zw} = \frac{4}{16/3} = \frac{3}{4}$  en  $y_{zw} = \frac{128/15}{16/3} = \frac{8}{5}$ .

3. Bepaal het zwaartepunt van het oppervlak begrensd door de gegeven krommen:

a)  $y = x^2, y = 9$ . *Antw.*  $(0, 27/5)$ .

b)  $y = 4x - x^2, y = 0$ . *Antw.*  $(2, 8/5)$ .

c)  $3y^2 = 4(3 - x), x = 0$ . *Antw.*  $(6/5, 0)$ .