(HOOFDSTUK 60, uit “College Mathematics”, door Frank Ayres, Jr. and Philip A. Schmidt, Schaum’s Series, McGraw-Hill, New York; dit is de voorbereiding voor een uit te geven Nederlandse vertaling).

Krommen en oppervlakken in de ruimte

DE VERZAMELING VAN PUNTEN, en uitsluitend deze punten, waarvan de coördinaten voldoen aan een vergelijking van de vorm

(1) $F(x, y, z) = 0$

wordt een *oppervlak* genoemd. Op enkele uitzonderingen na, zullen we alleen oppervlakken beschouwen die van de tweede graad zijn.

De verzameling van punten, en enkel deze punten, waarvan de coördinaten tezelfdertijd voldoen aan een paar vergelijkingen van de vorm (1) $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ wordt een *kromme in de ruimte* genoemd. Bijvoorbeeld is $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ de vergelijking van een bol, terwijl $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z = 4$ de vergelijkingen zijn van een cirkel, namelijk de doorsnede van de sfeer en het vlak $z = 4$.

EEN CILINDER OF CILINDRISCH OPPERVLAK wordt voortgebracht door een rechte die zich evenwijdig aan zichzelf verplaatst en die steeds door een gegeven kromme gaat. De rechte die zich verplaatst heet de *generatrice* of *voortbrengende kromme*, en de gegeven kromme heet de *directrice* of *richtkromme*. De voortbrengende kromme in een van zijn posities heet een *element* van de cilinder. Als de richtkromme in een vlak ligt en als de voortbrengende kromme loodrecht staat op dat vlak, is de cilinder een *rechte cilinder*; als daarenboven de richtkromme een kegelsnede is, wordt de cilinder een *kwadratisch rechte cilinder* genoemd.

We beperken hier de bespreking tot een rechte cilinder waarvan de voortbrengende kromme loodrecht staat op een coördinatenvlak of evenwijdig is met een coördinatenvlak. De vergelijkingen van dergelijke cilinders zijn van de vorm $f(x, y) = 0$, $g(x, z) = 0$ of $h(y, z) = 0$; in elk geval is de voortbrengende van de cilinder evenwijdig met de as van veranderlijke die afwezig is in de vergelijking. Omgekeerd, is de verzameling punten van een vergelijking die slechts twee variabelen bevat een cilinder waarvan de richtlijn een kromme is in het vlak van die variabelen. Deze heeft dezelfde vergelijking, en de voortbrengende kromme is evenwijdig met de as van de ontbrekende variabele.

Voorbeeld 1. Bestudeer de kwadratische rechte cilinder

$$x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0.$$

Het is een cirkelvormige rechte cilinder voortgebracht door een rechte die zich steeds evenwijdig met de z-as verplaatst (z komt niet voor in de vergelijking) en die steeds door de cirkel $(x - 2)^2 + y^2 = 16$, $z = 0$ in het vlak xy gaat; zoals geïllustreerd in Figuur 2.

Zie oefening 1.

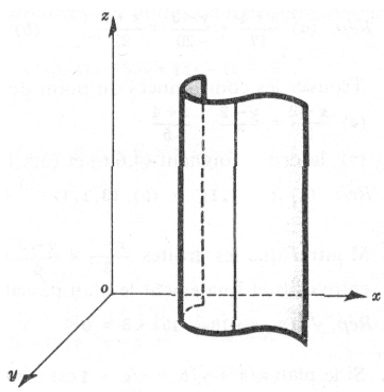


Fig. 1

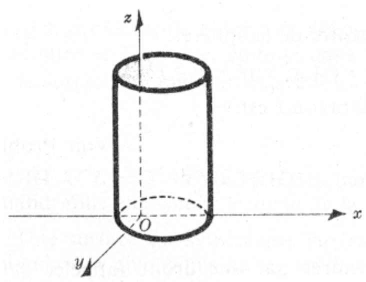


Fig.2 RECHTE CIRKELVORMIGE CILINDER $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$.

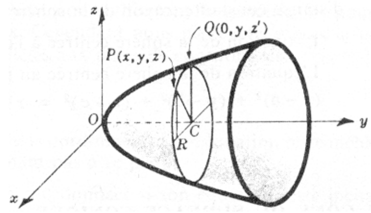


Fig.3 OMWENTELINGSPARA-BOLOÏDE $x^2 + z^2 = 2y$.

EEN OMWENTELINGSOPPERVLAK wordt voortgebracht door een vlakke kromme, de *voortbrengende kromme* geheten, rondom een rechte (de *as* genoemd) die behoort tot het vlak van de kromme. Natuurlijk is de doorsnede van een dergelijk oppervlak met een vlak loodrecht op de omwentelingsas een of meerdere cirkels.

Voorbeeld 2. Vind de vergelijking van het oppervlak voortgebracht door de omwenteling van de parabool $z^2 = 2y$, $x = 0$ rondom de y-as.
Zelfs al is het niet noodzakelijk, toch is het soms beter om de coördinaten te kiezen zoals aangegeven in de Fig. 3 om et oppervlak te illustreren. Stel dat $P(x, y, z)$ een punt is van dat oppervlak. Stel dat C het middelpunt is van de cirkel, die de doorsnede is verkregen door het oppervlak te snijden door P en loodrecht op de y-as (de as van wenteling) en stel dat $Q(0, y, z')$ een punt van doorsnede is van die cirkel en de parabool.
Stel R de voet van de loodlijn is vanuit P op het vlak xy. Dan is $CP = CQ$ want het zijn twee stralen van dezelfde cirkel.
Bovendien is $CQ = z' = \sqrt{(2y)}$, want Q ligt op de parabool; in de rechthoekige driehoek CRP, is $CP = \sqrt{CR^2 + RP^2} = \sqrt{x^2 + z^2}$. Dus is $\sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{2y}$ en de vergelijking van het oppervlak is $x^2 + z^2 = 2y$. Merk op dat men de vergelijking van het oppervlak kan verkrijgen door gewoon z in de vergelijking van de parabool te vervangen door $\sqrt{x^2 + z^2}$.

De vergelijking het omwentelingsoppervlak voortgebracht door draaiing van een kromme gelegen in een van de coördinatenvlakken rondom een van de coördinatenassen van dat vlak kan als volgt verkregen worden: als de kromme draait rondom

(a) de x-as, vervang y of z in de vergelijking van de kromme door $\sqrt{y^2 + z^2}$;

(b) de y-as, vervang x of z in de vergelijking van de kromme door $\sqrt{x^2 + z^2}$;

(a) de z-as, vervang x of y in de vergelijking van de kromme door $\sqrt{x^2 + y^2}$;

Voorbeeld 3. De vergelijking schrijven van het omwentelingsoppervlak voortgebracht door de kromme $9x^2 + 16y^2 = 144$, $z = 0$ draaiend rondom de x-as.
We vervangen y door $\sqrt{y^2 + z^2}$ in de vergelijking $9x^2 + 16y^2 = 144$ zodat we verkrijgen $9x^2 + 16(y^2 + z^2) = 144$ of $9x^2 + 16y^2 + 16z^2 = 144$, en dat is de vergelijking van het oppervlak. Vermits de richtlijn een ellips is wordt het oppervlak een *omwentelingsellipsoïde* genoemd. Merk op dat twee van de drie coëfficiënten gelijk zijn.
Zie oefeningen 2-3.

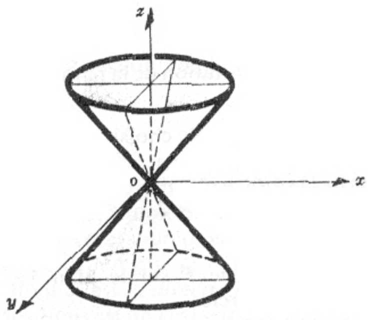
EEN BOL OF EEN SFERISCH OPPERVLAK is een omwentelingsoppervlak waarbij een cirkel draait over een van zijn diameters. Het is ook de verzameling punten die ligt op een vaste afstand (de straal van de bol) van een vast punt (het middelpunt van de bol).

De vergelijking van de bol met middelpunt in de oorsprong en straal r is $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.
De vergelijking van de bol met middelpunt in het punt $C(a, b, c)$ met straal r is $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$.

Zie oefeningen 4-5.

EEN KEGEL OF EEN KEGELOPPERVLAK is een oppervlak voortgebracht door een rechte (de *voortbrengende rechte*) die zich verplaatst volgens een gegeven kromme (de *richtkromme* genaamd) en die steeds gaat door een vast punt (de top genoemd). De voortbrengende rechte in een van haar posities is een *element* van de kegel. De top scheidt het oppervlak in twee delen, de *bladen* genoemd.

Wanneer de top van de kegel de oorsprong is (zie Fig. 4: $x^2 + y^2 = z^2$) is de vergelijking homogeen in de drie variabelen dat wil zeggen als $f(x, y, z) = 0$ van graad n de vergelijking is van een kegel, dan is $f(kx, ky, kz) = k^n f(x, y, z)$.



Fïg. 4 Kegel

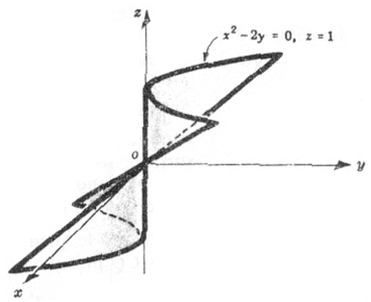


Fig. 5 Kegel
$x^2 - 2yz = 0$

Voorbeeld 4. Identificeer en construeer het oppervlak met vergelijking $x^2 - 2yz = 0$. Zie Fig. 5.

Zij $f(x, y, z) = x^2 - 2yz$; dan is $f(kx, ky, kz) = (kx)^2 - 2(ky)(kz) = k^2 [x^2 - 2yz] = k^2 f(x, y, z)$. De vergelijking is homogeen; de verzameling punten is een kwadratische kegel (een vergelijking van de tweede graad) met de top in de oorsprong.

Om het oppervlak voort te brengen, gebruiken we de parabool $x^2 = 2y$, $z = 1$ als richtkromme (in het vlak $z = 1$). Na het tekenen van de parabool en enkele elementen (zoals de rechten die de oorsprong verbinden met de punten van de parabool), verkrijgen we een voldoening gevende illustratie.

Zie oefening 6.

DE ALGEMENE VERGELIJKING VAN DE TWEEDE GRAAD IN DRIE VARIABELEN,

$$(2)\ Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0,$$

waar ten minste een van de coëfficiënten A, B, C, D, E, F verschillend is van nul, stelt een kwadratisch oppervlak voor.

Zoals in het geval van de algemene vergelijking van de tweede graad met twee veranderlijken, kan een gepaste keuze van een rotatie en een translatie de coördinaten zodanig veranderen dat (2) in een gereduceerde vorm verandert. We bestuderen kort alk van de kwadratische oppervlakken die we nog niet hebben bestudeerd door elk vorm tot de gereduceerde vergelijking te herleiden.

Hier zullen we de symmetrie, de snijpunten en de spreiding beschouwen, een beetje zoals bij de studie van kegelsneden. Toch zal het vooral door de studie van de snijdingen met de vlakken evenwijdig aan de coördinatenvlakken zijn dat we beter de natuur van het oppervlak zullen zien.

EEN OPPERVLAK IS SYMMETRISCH met betrekking tot een coördinatenvlak als zijn vergelijking onveranderd blijft wanneer we het teken van de veranderlijke veranderen die niet tot het vlak behoort.
Een oppervlak est symmetrisch met betrekking tot een coördinatenas als zijn vergelijking onveranderd blijft wanneer we de tekens van de variabelen veranderen die niet to de as behoren.
Een oppervlak est symmetrisch met betrekking tot de oorsprong als zijn vergelijking onveranderd blijft wanneer we de tekens van alle variabelen veranderen.

Voorbeeld 5. Het oppervlak met vergelijking $x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 4z + 5 = 0$ is symmetrisch met betrekking tot het vlak *yz* want zijn vergelijking verandert niet wanneer x vervangen wordt door $-x$. Het is symmetrisch met betrekking tot het vlak *xz* want de vergelijking blijft onveranderd wanneer *y* wordt vervangen door $-y$. Het is echter niet symmetrisch met betrekking tot het vlak *xy* want de vergelijking verandert wanneer we *z* vervangen door $-z$.
Het oppervlak est symmetrisch met betrekking tot *z*-as want de vergelijking blijft onveranderd wanneer *x* en *y* vervangen worden door –x en $-y$. Ze is niet symmetrisch met betrekking tot de *x*-as noch met betrekking tot de *y*-as.
Het oppervlak is niet symmetrisch met betrekking tot de oorsprong want de vergelijking wordt $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 4z + 5 = 0$ wanneer we *x, y, z* vervangen door $-x$, $-y$, $-z$ in de vergelijking.

DE SNIJPUNTEN VAN EEN OPPERVLAK met de assen zijn de georiënteerde afstanden van de oorsprong naar de punten waar de coördinatenassen het oppervlak doorsnijden. De snijpunten laten zich verkrijgen door één paar veranderlijken gelijk aan nul te nemen en op te lossen naar de andere.
Het *spoor* van een oppervlak in een coördinatenvlak is de kromme bepaald door de doorsnede van het oppervlak met dit coördinatenvlak. Het *spoor* in een coördinatenvlak laat zich bekomen door een van de veranderlijken nul te stellen.

Voorbeeld 6. De snijpunten vinden met de assen en het spoor in de coördinatenvlakken van het oppervlak $x^2 + 4y^2 - 8z = 16$.
Door $y = z = 0$ te stellen, verkrijgen we $x^2 = 16$; de snijpunten met de *x*-as zijn ±4.
Door $x = z = 0$ te stellen, verkrijgen we $4y^2 = 16$; de snijpunten met de *y*-as zijn ±2.
Door $x = y = 0$ te stellen, verkrijgen we het snijpunt -2 met de *z*-as.

Door te stellen $z = 0$, wordt het spoor in het *xy*-vlak de ellips $x^2 + 4y^2 = 16$, $z = 0$. Het spoor in het vlak *xz* is de parabool $x^2 - 8z = 16$, $z = 0$; het spoor in het vlak yz is de parabool $y^2 - 2z = 4$, $x = 0$.

DE VERZAMELING PUNTEN VOOR DE VERGELIJKING $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ is een *ellipsoïde.* Als ten minste twee van de constanten *a*, *b* gelijk zijn is het een omwentelingsellipsoïde; als $a = b = c$, is het een bol.
De ellipsoïde is symmetrisch met betrekking tot de coördinatenvlakken, de assen en de oorsprong. De sporen in de coördinatenvlakken zijn ellipsen of cirkels:

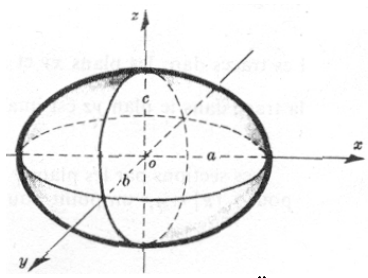


Fig. 4: ELLIPSOÏDE

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

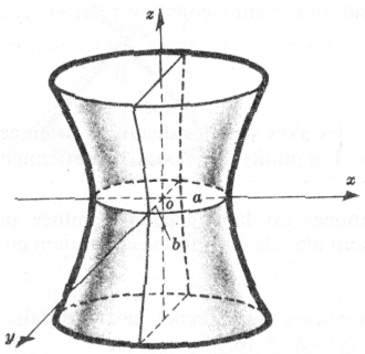
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0;\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0;\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0.$$

Een doorsnede met het vlak $z = k$ is een ellips (of een cirkel) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$. De grootte van de ellips vermindert naarmate het vlak zich verwijdert van het plan *xy*. De ellips herleidt zich tot een punt voor $k = c$ en is imaginair voor $k > c$. Er zijn analoge resultaten voor de doorsneden met vlakken $y = k$ of $x = k$.

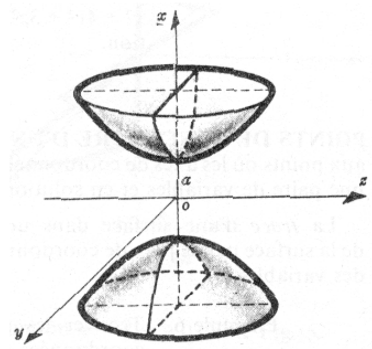
DE VERZAMELING PUNTEN VOOR DE VERGELIJKING $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ is een *hyperboloïde met één blad* (als $a = b$ is het een omwentelingshyperboloïde). Ze is symmetrisch met betrekking tot de coördinatenvlakken, de assen en de oorsprong.

Het spoor in het vlak *xy* is de ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z = 0$; de sporen met de vlakken *xz* en *yz* zijn de hyperbolen $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $y = 0$ en $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $x = 0$.

Een doorsnede met een vlak $z = k$ is een ellips, en zijn grootte vermeerdert naargelang het vlak zich verwijdert van het vlak *xy*. De doorsneden met de vlakken $y = k$ en $x = k$ zijn hyperbolen.



HYPERBOLOÏDE MET EEN BLAD $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



HYPERBOLOÏDE MET TWEE BLADEN $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

DE VERZAMELING PUNTEN VOOR DE VERGELIJKING $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ is een hyperboloïde met twee bladen. Als $b = c$, dan is de verzameling een omwentelingshyperboloïde. Deze is symmetrisch met betrekking tot de coördinatenvlakken, de assen en de oorsprong.

De sporen in de *xy*-vlakken en *xz*-vlakken zijn de hyperbolen $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $z = 0$ en $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $y = 0$; het spoor in het vlak *yz* is imaginair.

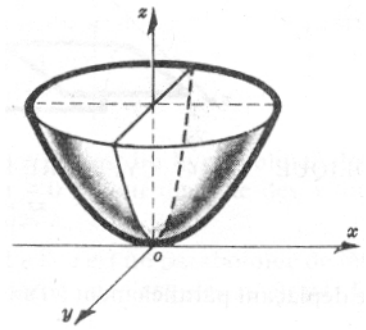
De doorsneden in de vlakken $y = k$ en $z = k$ zijn hyperbolen; de doorsnede met het vlak $x = k$ is imaginair voor $|k| < a$, een punt voor $|k| = a$, en een ellips (of een cirkel) voor $|k| > a$.

DE VERZAMELING PUNTEN VOOR DE VERGELIJKING $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$ is een elliptische paraboloïde.

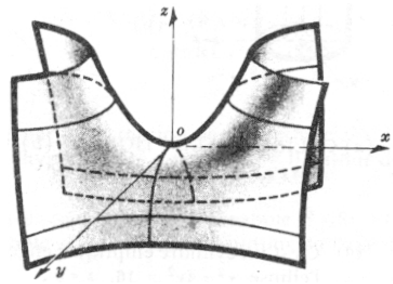
Als $a = b,$ is de verzameling een omwentelingsparaboloïde. Ze is symmetrisch met betrekking tot de vlakken xz en yz, en de z-as. Si $c > 0$, ligt het oppervlak boven het vlak xy; als $c < 0$, ligt het oppervlak onder het xy-vlak.

De sporen in de vlakken xz en yz zijn de parabolen; $\frac{x^2}{a^2}=cz$, $y = 0$ en $\frac{y^2}{b^2}=cz$, x=0; het spoor in het vlak xy is de oorsprong.

De doorsneden met de vlakken $x = k$ en $y = k$ zijn parabolen; de doorsnede met het vlak $z = k$ is imaginair wanneer $kc < 0$, een punt wanneer $k = 0$, en een ellips wanneer $kc > 0$.



ELLIPSTISCHE PARABOLOÏDE $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$



HYPERBOLISCHE PARABOLOIDE $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz$

DE VERZAMELING VAN PUNTEN VOOR VERGELIJKING $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz$ is een parabolische hyperboloïde. Ze is symmetrisch met betrekking tot de vlakken xz en yz en de z-as.

Het spoor in het vlak xy is het paar rechten $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$; de sporen in de vlakken xz en yz zijn de parabolen $\frac{x^2}{a^2}=cz$ en $\frac{y^2}{b^2}=-cz$.

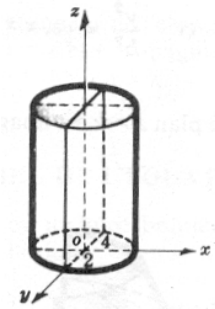
De doorsnede met een vlak $z = k$ is een hyperbool, uitgezonderd voor $k = 0$, waar het een paar rechten is zoals reeds vermeld. De doorsnede met de vlakken $x = k$ en $y = k$ zijn parabolen.

BEHALVE DE BESCHREVEN OPPERVLAKKEN, bestaan er bepaalde ontaarde verzamelingen zoals een paar vlakken, een vlak dat twee maal geteld wordt, een rechte (een cilinder met straal 0) en een punt.

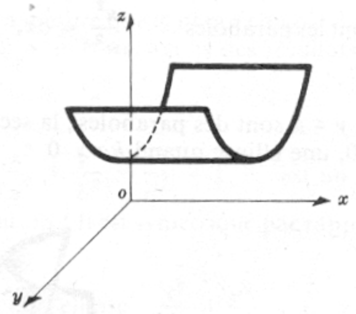
Zie oefening 7.

OPGELOSTE OEFENINGEN

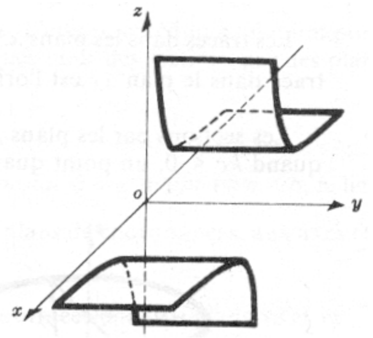
1. Bestudeer en illustreer elk van de volgende rechte cilinders:
   (a) $x^2 + 4y^2 = 16$, (b) $y^2 = 4z - 8$, (c) $xz = -12$.



(a) ELLIPTISCHE CILINDER
$x^2 + 4y = 16$



(b) PARABOLISCHE CILINDER
$y^2 = 4z - 8$



(c) HYPERBOLISCHE CILINDER
$xz = -12$

(a) Dit is een elliptische cilinder, voortgebracht door een rechte die zich verplaatst evenwijdig met de z-as volgens de ellips $x^2 + 4y^2 = 16$, $z= 0$.
(b) Dit is een parabolische cilinder, voortgebracht door een rechte die zich verplaatst evenwijdig met de x-as volgens de parabool $y^2 = 4z - 8$, $x= 0$.
(c) Dit is een hyperbolische cilinder, voortgebracht door een rechte die zich verplaatst evenwijdig met de y-as volgens de hyperbool $xz = -12$, $y = 0$.

2. De vergelijking vinden van het oppervlak voortgebracht door de omwenteling van de kromme om de gegeven as.
   (a) $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$; rondom de x-as.
   (b) $9x^2 - 4z^2 = 36$, $y = 0$; rondom de z-as.
   (c) $y + 2z + 4 = 0$, $x = 0$; rondom de y-as.

(a) Vervang y door $\sqrt{y^2+z^2}$, dan is $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Dit is een *sfeer*.

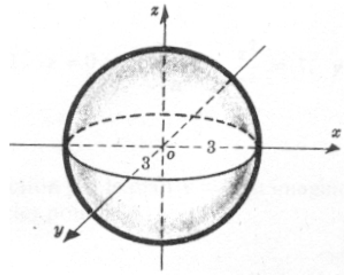
(b) Vervang x door $\sqrt{x^2+y^2}$, dan is $9x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36$. Dit is een *omwentelingshyperboloïde*.

(c) Vervang z door $\sqrt{x^2+y^2}$, dan is $y+2\sqrt{x^2+y^2}+4=0$. Dus is $y + 4 = -2\sqrt{x^2+z^2}$ en door dit te kwadrateren wordt deze $4x^2 + 4z^2 - (y + 4)^2 = 0$. Dit is een *kegel*.

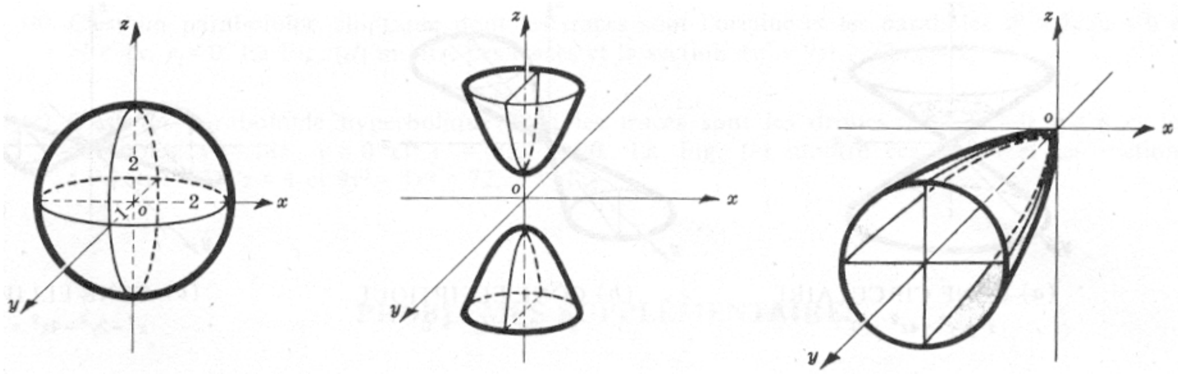
3. Identificeer en illustreer:
   (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, (b) $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$, (c) $z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$ (d) $x^2 + z^2 - 8y = 0$.

(a) De verzameling is een bol, voortgebracht door de omwenteling van de cirkel $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$ rondom de x-as of de y-as, of door de rotatie van de cirkel $x^2 + z^2 = 9$, $y = 0$ rondom de x-as of de z-as. Zie figuur hierbij.

(b) De verzameling is een omwentelingsellipsoïde, voortgebracht door de omwenteling van de ellips $x^2 + 4y^2 = 4$, $y = 0$ rondom de y-as, of door de rotatie van de ellips $4y^2 + z^2 = 4$, $x = 0$ rondom de y-as of de z-as. Zie figuur (b).



(a) SFEER $x^2+ y^2+ z^2 = 9$



(b) OMWENTELINGS-ELLIPSOÏDE
$x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$

(c) OMWENTELINGS-HYPERBOLOÏDE
$z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$

(d) OMWENTELINGS-PARABOLOÏDE
$x^2 + z^2 - 8y = 0$

(c) Dit is een omwentelingshyperboloïde, voortgebracht door omwenteling van de hyperbool $z^2 - 4x^2 = 4$, $y = 0$ rondom de x-as, of door omwenteling van de hyperbool $z^2 - 4y^2 = 4$, $x = 0$ rondom de z-as.
(d) Dit is een omwentelingsparaboloïde, voortgebracht door omwenteling van de parabool $z^2 - 8y = 0$, $z = 0$ rondom de y-as.

4. Vind de vergelijking van de volgende sferen (a) $C(2, -3, -4)$, $r = 5$; (b) gecentreerd op de x-as, en gaande door $A(2, 3, 5)$ en $B(6, -3, 3)$.

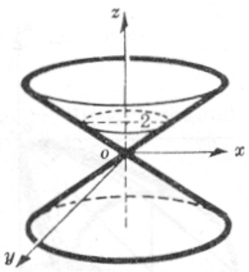
(a) De vergelijking is $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 4)^2 = 25$.
(b) Zij $(a, 0, 0)$ het middelpunt. Dan is $(CA)^2 = (CB)^2$ of $(a - 2)^2 + 9 + 25 = (a - 6)^2 + 9 + 9$ en $a = 2$. Het middelpunt is $C(2, 0, 0)$ en de straal in het kwadraat is $r^2 = (a - 2)^2 + 9 + 25 = 34$.
De oplossing is $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 34$.

5. Vind de coördinaten van het middelpunt van de sfeer en de straal.
(a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 36$, ($b$) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 10z + 25 = 0$.

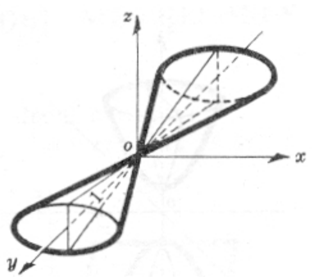
(a) Het middelpunt is $C(2, 3, -4)$ en de straal is $r = \sqrt{36} = 6$.
(b) Door het kwadraat te vervolledigen, komt er $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = -25 + 9 + 16 + 25 = 25$. Het middelpunt is $C(3, -4, 5)$ en de straal $r = 5$.

6. Bestudeer en illustreer elk van de volgende oppervlakken:
(a) $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$, (b) $x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 0$, (c) $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 0$.

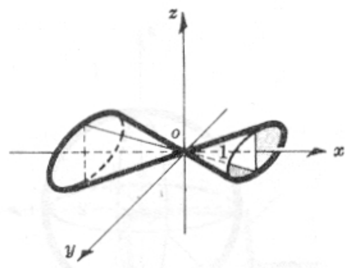
(a) Het is een cirkelvormige kegel, voortgebracht door een rechte die gaat door de oorsprong en die zich verplaatst volgens de cirkel $x^2 + y^2 = 4$, $z = 1$ of $x^2 + y^2 = 16$, $z = -2$, enzovoort. Het geval van de eerste cirkel werd geïllustreerd in Fig. (a).
(b) Het is een elliptische kegel, voortgebracht door een rechte die gaat door de oorsprong en die zich verplaatst volgens de ellips $x^2 + 4z^2 = 2$, $y = 1$. Zie in Fig. (b).



(*a*) EEN CIRKELVORMIGE KEGEL
$x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$



(*b*) EEN ELLIPTISCHE KEGEL
$x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 0,$

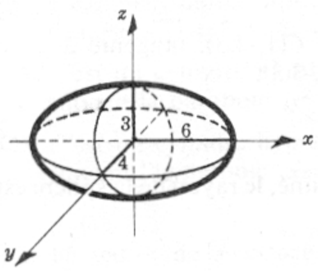


(*c*) EEN ELLIPTISCHE KEGEL
$x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 0$

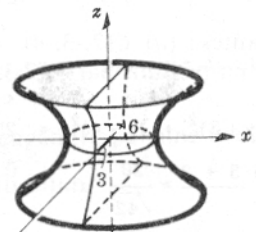
(*c*) Het is een elliptische kegel, voortgebracht door een rechte die gaat door de oorsprong en die zich verplaatst volgens de ellips $2y^2 + 4z^2 = 1$, $y = 1$. Zie in Fig. (*b*).

7. Illustreer de volgende kwadratische oppervlakken: (*a*) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 144$, (*b*) $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$ (*c*) $x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 36$, (*d*) $4y^2 + 9z^2 = 36x$ (*e*) $4x^2 - 9y^2 = 72z$.

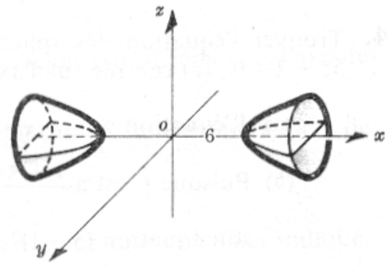
(a) Het is een ellipsoïde waarvan de sporen in de coördinatenvlakken ellipsen zijn: $4x^2 + 9y^2 = 144$, $z = 0$; $x^2 + 4z^2 = 36$, $y = 0$; $9y^2 + 16z^2 = 144$, $x = 0$; Deze sporen volstaan om het oppervlak te illustreren.



(*a*) ELLIPSOÏDE



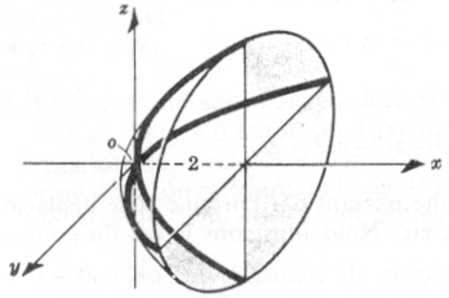
(*b*) HYPERBOLOÏDE MET ÉÉN BLAD



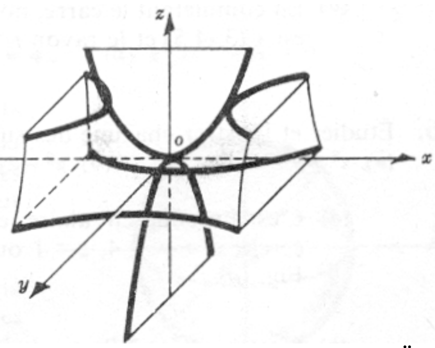
(*c*) HYPERBOLOÏDE MET TWEE BLADEN

(*b*) Het is hyperboloïde met één blad waarvan de sporen in de coördinatenvlakken ellipsen zijn: $x^2 + 4y^2 = 36$, $z = 0$ en hyperbolen $x^2 - 9z^2 = 36$, $y = 0$ en $4y^2 - 9z^2 = 36$, $x = 0$. De Fig. (*b*) toont de sporen en de doorsneden $x^2 + 4y^2 = 180$, $z = \pm 4$.

(*c*) Het is hyperboloïde met twee bladen waarvan de reële sporen hyperbolen zijn: $x^2 - 4y^2 = 36$, $z = 0$ en $x^2 - 9z^2 = 36$, $y = 0$. De Fig. (*c*) toont de sporen en de doorsneden $4y^2 + 9z^2 = 108$, $x = \pm 12$.



(*d*) ELLIPTISCHE PARABOLOÏDE



(*e*) HYPERBOLISCHE PARABOLOÏDE

(*d*) Het is elliptische paraboloïde waarvan de sporen de oorsprong en parabolen zijn: $y^2 = 9x$, $z = 0$ en $z^2 = 4x$, y=0. De Fig. (*d*) toont de sporen en de doorsneden $4y^2 + 9z^2 = 72$, $x = 2$.

(*e*) Het is hyperbolische paraboloïde waarvan de sporen de rechten zijn: $2x \pm 3y = 0$, $z = 0$ en de parabolen $x^2 = 18z$, $y = 0$ en $y^2 = -8z$, $x = 0$. De Fig. (*e*) toont de sporen en de doorsneden $4x^2 - 9y^2 = 72$, $z = 1$ en $-4x^2 + 9y^2 = 72$, $z = -1$.

SUPPLEMENTAIRE OEFENINGEN

8. Bestudeer en illustreer de volgende rechte cilinders.
(*a*) $y^2 + z^2 = 16$ (*b*) $4x^2 + 9y^2 = 36$ (*c*) $x^2 - 4z^2 = 36$ (*d*) $x^2 = 8y - 24$

9. Bepaal de vergelijking van het omwentelingsoppervlak voortgebracht door omwenteling van de gegeven kromme rondom de gegeven as:
(*a*) $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$; rondom de y-as. *Antw.:* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
(*b*) $x^2 - 4z^2 = 16$, y = 0; rondom de z-as. *Antw.:* $x^2 + y^2 - 4z^2 = 16$
(*c*) $y = 2x$, $z = 0$; rondom de x-as. *Antw.:* $4x^2 - y^2 - z^2 = 0$
(*d*) $x^2 + 3y = 6$, $z = 0$; rondom de y-as. *Antw.:* $x^2 + z^2 + 3y - 6 = 0$

10. Bepaal de as van wenteling en de vergelijking van de voortbrengende kromme in het coördinatenvlak dat de as bevat.
(*a*) $9x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0$ *Antw.:* de x-as; $9x^2+y^2 = 36$, $z = 0$ of $9x^2+z^2 = 36$, $y= 0$
(*b*) $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 12$ *Antw.:* de y-as; $2x^2 + 3y^2 = 12$, $z = 0$ of $3y^2 + 2z^2 = 12$, x=0
(*c*) $x^2 + y^2 = 4$ *Antw.:* de z-as; x=2, y=0 of $y = 2$, x=0
(*d*) $x^2 - 3y^2 - 3z^2 = 9$ *Antw.:* de x-as; $x^2 - 3y^2 = 9$, z=0 of $x^2 - 3z^2 = 9$, y=0

11. Bepaal de vergelijking van de sfeer
(*a*) met middelpunt in (1, 2, -3) en straal 2.
(*b*) met middelpunt in (2, -1, 1) en die gaat door (5, 2,-3).
(*c*) met middelpunt in (3, 2, 4) en rakend aan $2x + y + 2z - 31 = 0$.
(*d*) die gaat door (3, 5, 4), (4, 4, -8) en (-5, 0, 1).
Antw.: (*a*) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 10 = 0$ (*c*) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 8z + 4 = 0$
(*b*) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 28 = 0$ (*d*) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - 40 = 0$

12. Bepaal de coördinaten van het middelpunt en de straal van elke sfeer.
(*a*) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 8z + 10 = 0$ *Antw.:* $C(-3, 1, 4)$; r=4
(*b*) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ *Antw.:* $C(2, -3, 0)$; r = 5
(*c*) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x - 12y - 16z - 10 = 0$ *Antw.:* C(1/2, 3/2, 2); r=2

13. Bestudeer en illustreer de oppervlakken
(*a*) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$ (g) $x^2 + 4z^2 = 16$
(*b*) $4x^2 + 4y^2 - 25z^2 = 100$ (*h*) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 0$
(*c*) $36x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36$ (*i*) $x^2 + 4y^2 + 4z = 0$
(*d*) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y = 0$ (*j*) $y^2 = 4xz$
(*e*) $4x^2 - 16y^2 - 25z^2 = 400$ (*k*) $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 0$
(*f*) $x^2 - 4y^2 - 4z = 0$ (*l*) $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$

(Zie hiervoor “Theory and Problems of College Physics”, door Fredericj J. Bueche, Schaum’s Series, McGraw-Hill, New York).

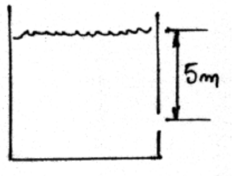
TOEPASSINGEN

1. De drie gaswetten van Boyle-Mariotte, Charles en Gay-Lussac kunnen worden samengevat als $pV/T = C$, een constante. Het is een voorbeeld van een verband tussen 3 variabelen, p, V en T. De constante in kwestie is gelijk aan nR, waarin n het aantal kilomol van het gas is, en R = 8314 J/(#kmol.K) de universele gasconstante is. De gaswet wordt dan: $pV/T = nR$, of nog $pV = nRT$. Eén kmol van een stof is een hoeveelheid die men vindt uit de tabel van Mendeljev: zo is 1 kmol waterstof H_2 gelijk aan 2 kg (2×1, en H heeft waarde 1 in de tabel), l kmol stikstofgas N_2 gelijk aan 28 kg (2×14, en N waarde 14), 1 kmol zuurstofgas O_2 gelijk aan 32 kg (2×16), enzovoort.

a) Bereken het volume van 1 kmol gas bij 0°C en 1atm.

a) Omdat $pV/T = nR$ is $V=nRT/p = 1\cdot 8314\cdot 273/1{,}013\cdot 10^3 = 22{,}4$ m^3. Dus, nemen in “normale omstandigheden” 2 kg H_2 hetzelfde volume in als 32 kg O_2 of 28 kg N_2 en dit is steeds 22,4 m³.

2. De wet van Bernoulli beschrijft ook een verband tussen 3 variabelen, namelijk p, v en h, waarin p de druk is van een vloeistof in een buis, v de snelheid en h de hoogte: $p + ½\rho v^2 + \rho gh$ = constant. Dus, als p_1 en v_1 de druk en de snelheid van de vloeistof in een punt 1 op hoogte h_1 voorstellen, en p_2, v_2 en h_2 de waarden zijn voor een punt 2, dan is $p_1 + ½\rho v_1^2 + \rho gh_1 = p_2 + ½\rho v_2^2 + \rho gh_2$. Hierin is ρ de soortelijke massa en g de valversnelling.



a) Welk volume water loopt per minuut uit een open reservoir als men weet dat en opening van 3 cm diameter zich op 5 m onder het niveau van het water bevindt (deze oefening illustreert de *wet van Torricelli*).
b) Een waterreservoir heeft een lek, terwijl de waterdruk 500 kPa bedraagt. Wat is de snelheid waarmee het water doorheen de opening stroomt?
c) Wat is de arbeid verwezenlijkt door een pomp die 5 m³ water 20 m hoger brengt en een leiding voedt met een druk van 150 kPa?