# Hoofdstuk 39

# Logaritmen

**DE LOGARITME VAN EEN POSITIEF GETAL** ***N*** met respect tot een gegeven basis $b$ (geschreven als $\log_b N$) is de exponent van de macht waartoe $b$ moet worden verheven om $N$ als resultaat te geven. Er zal worden verondersteld doorheen dit hoofdstuk dat $b$ positief is en verschillend van 1.

**VOORBEELD 1.**

(*a*) Vermits $9 = 3^2$, is $\log_3 9 = 2$.
(*b*) Vermits $64 = 4^3$, is $\log_4 64 = 3$.
(*c*) Vermits $64 = 2^6$, is $\log_2 64 = 6$.
(*d*) Vermits $1000 = 10^3$, is $\log_{10} 1000 = 3$.
(*e*) Vermits $0{,}01 = 10^{-2}$, is $\log_{10} 0{,}01 = -2$.

(Zie Vraagstukken 39.1 – 39.3). Merk op dat als $f(x) = b^x$ en $g(x) = \log_b x$ (waarbij $b > 0$, $b \neq 1$) dan $f(g(x)) = b^{\log_b x} = x$ en $g(f(x)) = \log_b(b^x) = x$. Dus zijn $f$ en $g$ inverse functies van elkaar.

**BASISWETTEN VAN LOGARITME**

(1) De logaritme van het product van twee of meer positieve getallen is gelijk aan de som van de logaritmen van de verschillende getallen. Bijvoorbeeld,

$$\log_b(P \cdot Q \cdot R) = \log_b(P) + \log_b(Q) + \log_b(R).$$

(2) De logaritme van het quotiënt van twee positieve getallen is gelijk aan de logaritmen van het deeltal min de logaritmen van de deler. Bijvoorbeeld,

$$\log_b(P / Q) = \log_b(P) - \log_b(Q).$$

(3) De logaritme van de macht van een positief getal is gelijk aan de logaritme van dat getal vermenigvuldigd met de exponent van de macht. Bijvoorbeeld,

$$\log_b(P^n) = n \log_b(P).$$

(4) De logaritme van de wortel van een positief getal is gelijk aan de logaritme van dat getal gedeeld door de index van de wortel. Bijvoorbeeld,

$$\log_b \sqrt[n]{P} = \frac{1}{n}\log_b P\,.$$

(Zie vraagstukken 39.4 – 39.7)

**BIJ NUMERIEKE BEREKENINGEN** is 10 een wijd verspreide basis voor een logaritmestelsel. Deze logaritmen worden de *gewone* of *Briggse* logaritmen genoemd. De gewone logaritme van een positief getal $N$ wordt geschreven als log $N$. Deze komen mooi overeen met het decimale systeem; bijvoorbeeld is log 1000 = log $10^3 = 3$.

**EEN EXPONENTIELE VERGELIJKING** is een vergelijking die een of meer onbekenden in een exponent bevat. Bijvoorbeeld zijn $2^x = 7$ en $(1{,}03)^{-x} = 2{,}5$ exponentiële vergelijkingen. Dergelijke vergelijkingen worden opgelost met logaritmen.

**VOORBEELD 2.** Los de exponentiële vergelijking $2^x = 7$.
Neem de logaritmen van beide zijden: $x \log 2 = \log 7$.
Los op naar $x$: $x = \dfrac{\log 7}{\log 2} = \dfrac{0{,}8451}{0{,}3010} = 2{,}808$ bij benadering.
(Zie Vraagstukken 39.16).

**IN DE WISKUNDE** zijn de meest nuttige logaritmen echter de *natuurlijke logaritmes* waarin de basis een zeker irrationaal getal $e = 2{,}71828$, bij benadering.
De natuurlijke logaritme van $N$, ln $N$, en de gewone logaritme van $N$, log $N$, zijn verwant door de formule

$$\ln N \approx 2.3026 \log N.$$

**OP DE REKENMACHINE** kan men meer algemeen de logaritme met respect tot een willekeurige basis vinden door de formules **[dit is kleine aanpassing van het boek]**

$$\log_b N = \frac{\log N}{\log b} \text{ of } \log_b N = \frac{\ln N}{\ln b}.$$

Merk verder op dat $e^x$ de inverse functie is van ln $x$, en $10^x$ de inverse functie is van log $x$.

# Opgeloste Vraagstukken

**39.1** Verander de volgende uitdrukkingen van exponentiële in logaritmische vorm:
(*a*) $7^2 = 49$, (*b*) $6^{-1} = 1/6$, (*c*) $10^0 = 1$, (*d*) $4^0 = 1$, (*e*) $\sqrt[3]{8} = 2$.

*Antw.* (*a*) $\log_7 49 = 2$, (*b*) $\log_6 (1/6) = -1$, (*c*) $\log_{10} 1 = 0$, (*d*) $\log_4 1 = 0$, (*e*) $\log_8 2 = 1/3$.

**39.2** Verander de volgende uitdrukkingen van logaritmische in exponentiële vorm:
(*a*) $\log_3 81 = 4$, (*b*) $\log_5 (1/625) = -4$, (*c*) $\log_{10} 10 = 1$, (*d*) $\log_9 27 = 3/2$.

*Antw.* (*a*) $3^4 = 81$, (*b*) $5^{-4} = 1/625$, (*c*) $10^1 = 10$, (*d*) $9^{3/2} = 27$.

**39.3** Gegeven *x*, evalueer:

(*a*) $x = \log_5 125$ (*d*) $x = \log_2 1/16$ (*g*) $\log_x 1/16 = -2$
(*b*) $x = \log_{10} 0{,}001$ (*e*) $x = \log_{1/2} 32$ (*h*) $\log_6 x = 2$
(*c*) $x = \log_8 2$ (*f*) $\log_x 243 = 5$ (*i*) $\log_a x = 0$

*Antw.* (*a*) 3, vermits $5^3 = 125$ (*d*) -4, vermits $2^{-4} = 1/16$ (*g*) 4, vermits $4^{-2} = 1/16$
(*b*) -3, vermits $10^{-3} = 0{,}001$ (*e*) -5, vermits $(1/2)^{-4} = 32$ (*h*) 36, vermits $6^2 = 36$
(*c*) 1/3, vermits $8^{1/3} = 2$ (*f*) 3, vermits $3^5 = 243$ (*i*) 1, vermits $a^0 = 1$.

**39.4** Bewijs de vier wetten van de logaritmen.

Stel dat $P = b^p$ en $Q = b^q$; dan is $\log_b P = p$ en $\log_b Q = q$.

(1) Vermits $P \cdot Q = b^p \cdot b^q = b^{p+q}$, is $\log_b PQ = pq = \log_b P + \log_b Q$; dus is de logaritme van het product van twee positieve getallen gelijk aan de som van de logaritmen van de getallen.
(2) Vermits $P / Q = b^p/b^q = b^{p-q}$, is $\log_b (P/Q) = p - q = \log_b P - \log_b Q$; dus is de logaritme van het quotiënt van twee positieve getallen gelijk aan de logaritmen van de teller min de logaritme van de noemer.
(3) Vermits $P^n = (b^p)^q = b^{np}$, is $\log_b P^n = np = n\log_b P$; dus is de logaritme van een macht van een positief getal gelijk aan het product van de exponent en de logaritmen van het getal.
(4) Vermits $\sqrt[n]{P} = P^{1/n} = b^{p/n}$, is $\log_b \sqrt[n]{P} = p/n = (1/n) \log_b P$; dus is de logaritme van een wortel van een positief getal gelijk aan het getal gedeeld door de indew van de wortel.

**39.5** Druk de logaritmen van de gegeven uitdrukkingen uit in termen van de logaritmen van de individuele erbij betrokken letters.

*(a)* $\log_b \dfrac{P \cdot Q}{R} = \log_b(P \cdot Q) - \log_b R = \log_b P + \log_b Q - \log_b R$

*(b)* $\log_b \dfrac{P}{Q \cdot R} = \log P - \log_b (Q \cdot R) = \log_b P - (\log_b Q + \log_b R) = \log_b P - \log_b Q - \log_b R$

*(c)* $\log_b P^2 \cdot \sqrt[3]{Q} = \log_b P^2 + \log_b \sqrt[3]{Q} = 2 \log_b P^2 + \dfrac{1}{3} \log_b Q$

*(d)* $\log_b \sqrt[3]{\dfrac{P \cdot Q^3}{R^{1/2} \cdot S}} = \dfrac{1}{2} \log_b \dfrac{P \cdot Q^3}{R^{1/2} \cdot S} = \dfrac{1}{2} [\log_b (P \cdot Q^3) - \log_b (R^{1/2} \cdot S)]$

$$= \frac{1}{2} (\log_b P + 3 \log_b Q - \frac{1}{2} \log_b R - \log_b S)$$

**39.6** Druk elk van de volgende uit als één enkel logaritme:

*(a)* $\log_b x - 2 \log_b y + \log_b z = (\log_b x + \log_b z) - 2 \log_b y = \log_b xz - \log_b y^2 = \log_b \dfrac{xz}{y^2}$

*(b)* $\log_b 2 + \log_b \pi + \dfrac{1}{2} \log_b l - \dfrac{1}{2} \log_b g = (\log_b 2 + \log_b \pi) + \dfrac{1}{2} (\log_b l - \log_b g)$

$$= \log_b (2\pi) + \frac{1}{2} (\log_b \frac{l}{g}) = \log_b(2\pi \sqrt{\frac{l}{g}})$$

**39.7** Toon aan dat $b^{3 \log_b x} = x^3$.

Stel dat $3 \log_b x = t$. Dan is $\log_b x^3 = t$ en $x^3 = b^t = b^{3 \log_b x}$. *Of nog,* $b^{3 \log_b x} = b^{\log_b x^3} = x^3$ (door gebruik te maken van de eigenschap van de inverse functie).

**39.8** [Niet kennen]

**39.9** [Niet kennen]

**39.10** [Niet kennen]

**39.11** Los op

(*a*) $(1{,}06)^x = 3$.
Door de logaritmen te nemen, volgt dat $x \log 1{,}06 = \log 3$.

$$x = \frac{\log 3}{\log 1{,}06} \text{ en dus } x = 18{,}86\ldots$$

(*b*) $12^{2+5x} = 55(7^{3x})$.
Door de logaritmen te nemen, volgt dat $(2x + 5) \log 12 = \log 55 + 3x \log 7$.

$$2x \log 12 - 3x \log 7 = \log 55 - 5 \log 12.$$

$$x = \frac{\log 55 - 5 \log 12}{2 \log 12 - 3 \log 7} = 9{,}7\ldots\,.$$

(*c*) $(41{,}2)^x = (12{,}6)^{x-1}$.
Door de logaritmen te nemen, volgt dat $x \log 41{,}2 = (x - 1) \log 12{,}6$.

$$x \log 41{,}2 - x \log 12{,}6 = - \log 12{,}6 \text{ of}$$

$$x = \frac{-\log 12{,}6}{\log 41{,}2 - \log 12{,}6} = -2{,}138\ldots\,.$$

# Supplementaire Vraagstukken

**39.12** Los op voor $x$:

(*a*) $3^x = 30$ (*b*) $1{,}07^x = 3$ (*c*) $5{,}72^x = 8{,}469$ (*d*) $38{,}5^x = 6{,}5^{x-2}$

*Antw.* (*a*) 3,096 (*b*) 16,23 (*c*) 1,225 (*d*) -2,104

**39.13** Toon aan dat $10^{n \log(a+b)} = (a+b)^x$.

**39.14** Bepaal (*a*) log 3,64 (*b*) log 36,4 (*c*) log 364

**39.15** Bepaal het getal waarvan de natuurlijke logaritme is (*a*) 10 (*b*) 130 (*c*) 401,1