

HOOFDSTUK 19: DETERMINANTEN VAN ORDE TWEE EN DRIE.

Voor een 2×2 matrix A is $\det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$.

Een andere notatie is $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Zo is $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ -4 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -14$.

Voor een 3×3 matrix A is $\det A = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a.e.i + g.b.f + d.h.c - g.e.c - d.b.i - a.h.f$.

Zo is $\begin{vmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 4 & -6 & 7 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = (-8) \cdot (-6) \cdot 5 + (-1) \cdot 0 \cdot 7 + 4 \cdot (-3) \cdot 6 - (-1) \cdot (-6) \cdot 6 - 4 \cdot 0 \cdot (-5) - (-8) \cdot (-3) \cdot 7$
 $= 240 + 0 + (-72) - 36 - 0 - 168 = -36$

Het is goed op de hoogte te zijn van deze op het eerste gezicht gekunstelde werkwijze maar bij de praktische toepassing kan men een beroep doen op een softwareprogramma. Controleer zo bijvoorbeeld dat

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -37.$$

Sommige determinanten kunnen in een oogopslag worden geëvalueerd:

- als een rij (of een kolom) van een matrix A enkel nullen bevat, dan is $\det A = 0$;
- als 2 rijen (of kolommen) van een matrix A gelijk zijn, dan is $\det A = 0$.

Als men op een matrix iets uitricht met de rijen of kolommen, dan kan dit soms eenvoudige gevolgen hebben voor de determinant:

- als men 2 rijen (of kolommen) omwisselt, verandert enkel het teken;
- als men 1 rij (of kolom) met een getal k vermenigvuldigt, wordt ook de determinant met k vermenigvuldigd;
- men mag bij een rij (of kolom) steeds een veelvoud van een andere rij (of kolom) optellen zonder dat de determinant zal veranderen.

OEFENINGEN

1. Toon aan dat $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 0$ en $\begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ -2 & 6 & 5 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0$, omwille van de bovenstaande

eigenschappen.

2. Bereken op verschillende wijzen $\begin{vmatrix} 10 & 25 \\ -4 & -7 \end{vmatrix}$.

Antw.: 30.

3. Toon op verschillende wijzen dat $\begin{vmatrix} -6 & 3 & 8 \\ 15 & -9 & -20 \\ -9 & -1 & 12 \end{vmatrix} = 0$.

HOOFDSTUK 21: STEELSELS VAN LINEAIRE VERGELIJKINGEN.

STELSEL VAN N LINEAIRE VERGELIJKINGEN IN N ONBEKENDEN.

Beschouwen we voor de eenvoud een stelsel van (slechts) drie vergelijkingen en vier onbekenden:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{cases}$$

waarbij elke vergelijking geschreven wordt in met de onbekende x, y, z, w in deze volgorde, aan de linkerkant, en de constante term aan de rechterzijde. We vormen:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ en deze wordt de } \textit{determinant van de coëfficiënten} \text{ genoemd, en hieruit leiden we nog}$$

determinanten af:

$$N_x = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, N_y = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}, N_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}$$

door de kolom van de coëfficiënten van de betrokken onbekenden te vervangen door de kolom van de constanten.

DE REGEL VAN CRAMER STELT DAT:

(a) als $D \neq 0$, dan heeft het stelsel een unieke oplossing:

$$x = N_x/D, y = N_y/D, z = N_z/D$$

(Zie vraagstukken 21.1 – 21.2)

(b) Als $D = 0$ en ten minste één van de determinanten $N_x, N_y, N_z \neq 0$, dan heeft het stelsel geen oplossing.

Immers, indien $D = 0$ en $N_x \neq 0$ was, dan zou $x \cdot D = N_x$ tot een tegenstelling leiden. Dergelijke stelsels worden *inconsistent* genoemd.

(Zie vraagstuk 21.3)

(c) Als $D = 0$ en $N_x = N_y = N_z = N_w = 0$, dan kan het stelsel al of niet oplossingen hebben. Een stelsel met een oneindig aantal oplossingen heet *afhankelijk*.

Voor stelsels met drie (of vier) vergelijkingen is de eenvoudigste procedure om D te evalueren. Als $D \neq 0$, ga dan verder zoals in (A); als $D = 0$, doe dan zoals in Hoofdstuk 5. (Zie Vraagstuk 21.4).¹

STELSELS VAN M LINAIRE VERGELIJKINGEN IN $N > M$ ONBEKENDEN.

Gewoonlijk, als er minder vergelijkingen dan onbekenden zijn, zal het stelsel een oneindig "aantal" oplossingen hebben. Om een consistent stelsel van m vergelijkingen op te lossen, los het op naar m onbekenden (in bepaalde gevallen voor $p < m$ onbekenden) in functie van de anderen. (Zie Vraagstuk 21.5).

STELSELS VAN N VERGELIJKINGEN IN $M < N$ ONBEKENDEN. Gewoonlijk, als er meer vergelijkingen dan onbekenden zijn, is het stelsel inconsistent. Toch kan, als $p \leq m$ vergelijkingen een oplossing hebben en deze voldoet aan elk van de overblijvende vergelijkingen, dan is het stelsel consistent. (Zie Vraagstuk 21.6).

EEN HOMOGENE VERGELIJKING is er een waarin alle termen van dezelfde graad zijn; zoniet wordt de vergelijking *niet-homogeen* genoemd. Bijvoorbeeld, is de lineaire vergelijking $2x + 3y - 4z = 5$ niet-homogeen, maar is de vergelijking $2x + 3y - 4z = 0$ wel homogeen. (De term "5" in de eerste vergelijking heeft graad 0, terwijl alle andere termen van graad 1 zijn.)

Elk stelsel van homogene lineaire vergelijkingen

$$a_1x + b_1y + c_1z + \dots = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + \dots = 0$$

$$\vdots$$

$$a_nx + b_ny + c_nz + \dots = 0$$

heeft altijd de *triviale oplossing* $x = 0, y = 0, z = 0, \dots$

Een stelsel van n homogene lineaire vergelijkingen in n onbekenden heeft *alleen* de triviale oplossing als D , de determinant van het stelsel, niet gelijk is aan nul. Als $D=0$, dan heeft het stelsel ook *niet-triviale* oplossingen. (Zie Vraagstukken 21.7)

¹ Het geval (1) is reeds behandeld en ook (2) levert geen moeilijkheden. Het geval (3) probeert men tot (1) te herleiden, in er "overtallige" onbekenden zijn, of tot (2) door de vergelijkingen die afhankelijk zijn van andere uit te sluiten (d.w.z. die een lineaire combinatie zijn van andere vergelijkingen). Deze beslommingen leveren ook moeilijkheden voor sommige software en rekenmachines, en het is goed op de hoogte ervan te zijn om sommige bizarre resultaten te begrijpen. Bereken daarom veiligheidshalve bij het oplossen van een stelsel de determinant, en ga na of die niet te dicht bij nul ligt. Bovendien weet men in de praktische toepassingen die op dit niveau worden beschouwd ook veelal welke oplossing men kan verwachten, en ten minste of er één, geen, of oneindig veel oplossingen zullen zijn. Ook dit helpt om in te schatten of de bekomen oplossing wel de juiste is.

OPGELOSTE VRAAGSTUKKEN

$$1. \text{ Los op } \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 & (E1) \\ x + 5y - 3z = 3 & (E2) \\ 5x + 12y - 8z = 9 & (E3) \end{cases}$$

Opl.

Rekenmachine of software stellen hier wellicht wel onmiddellijk een oplossing voor. Soms ziet die er dan nog correct in de zin dat de getallen niet te klein of te groot schijnen. Berekening van de determinant van het stelsel geeft echter 0, en men is dus gewaarschuwd.

Nu blijken alle N_x , N_y en N_z echter nul. Het stelsel heeft dus misschien niet één maar oneindig veel oplossingen, waarvan deze voorgesteld door de rekenapparatuur er één van is. We stellen vast dat $E1+3E2 = E3$ (d.w.z. de eerste vergelijking plus driemaal de tweede geeft de derde vergelijking). We behouden daarom de eerste twee vergelijkingen, die we schrijven als $\begin{cases} 2x - 3y = -z \\ x + 5y = 3 + 3z \end{cases}$. Nu blijken de determinant van het stelsel niet

nul, en er is dus één oplossing, waarin echter z nog als "vrije" parameter fungeert (d.w.z dat z er nog een willekeurige waarde kan aannemen). Sommige rekenapparatuur kunnen de berekening van de oplossing nu aan,

en stellen voor dat $x = \frac{4}{13}z + \frac{9}{13}$ en $y = \frac{7}{13}z + \frac{6}{13}$.

Andere rekenapparatuur kon de berekening van de oplossing misschien van in het begin, en stelden bijvoorbeeld voor dat $x=x$, $y = \frac{7}{4}x - \frac{3}{4}$ en $z = \frac{13}{4}x - \frac{9}{4}$. Uit de uitdrukking voor z volgt dat $x = \frac{4}{13}z + \frac{9}{13}$ en dit is inderdaad weer de uitdrukking die voorheen werd voorgesteld.

2. Los op

$$a) \begin{cases} 6x - 2y + z = 1 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ 4x + 6y - 3z = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y + 2z = -2 \\ 5x - 9y + 14z = 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 7y + 5z = -22 \\ x - 9y - 11z = 26 \\ x - y - 3z = 2 \end{cases}$$

Ant. (a) inconsistent; (b) inconsistent; (c) $x=2z-1$, $y=-z-3$;

5. Een vliegtuig legt een afstand af van 3000 mi van Los Angeles naar New York met de wind, in 5 uur. Op de terugtocht heeft het 6 uur nodig. Vind de snelheid van het vliegtuig en de snelheid van de wind.

Opl.

Het stelsel $\begin{cases} 5x + 5y = 3000 \\ 6x - 6y = 3000 \end{cases}$ heeft als oplossingen $x=550$ en $y=50$. Bijgevolg heeft het vliegtuig een snelheid

van 550mph en de wind 50mph.

6. Oplossing A bevat 5% alcohol, terwijl een ander product B zelfs 15% alcohol bevat. Hoeveel liter van elk moet men mengen om 10l te krijgen dat 12% alcohol bevat?

Opl. 3l van A, en 7l van B.

7. Een verzameling Amerikaanse muntstukken bevat dimes en quarters alles samen \$7,60 en 43 stukken. Hoeveel dimes (1dime = 10¢) en quarters (1quarter = 25¢) zijn er?

Opl. controleer Uw antwoord.

8. Extra (!). Matt heeft 9 uur meer tijd nodig dan Chris om een muur te bouwen. Als ze samen werken kunnen zij een muur bouwen in 20 uur. Hoe lang duurt het voor elk van hen afzonderlijk om deze muur te bouwen?

Opl.: De enige correcte oplossing is 36 uur voor Chris en 45 uur voor Matt.

TOEPASSINGEN UIT DE CURSUS STRUCTUURLEER

1) Uit de cursus structuurleer werden de volgende stelsels geplukt.

$$\text{a) } \begin{cases} R_{Ax} - R_B \sin 30^\circ = 0 \\ R_{Ay} - 2 - R_B \cos 30^\circ = 0 \\ -6 + 5.R_B \cdot \cos 30^\circ = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} R_{Ax} = 0 \\ R_{Ay} - F + R_B = 0 \\ M_A - F \frac{1}{2} + R_B = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} R_{Ax} - T_{BC} = 0 \\ R_{Ay} - T_{BD} = 0 \\ R_{Az} - 0,2 = 0 \\ T_{BD} \cdot 0,6 - 0,2 \cdot 0,5 = 0 \\ 0,2 \cdot 0,2 - T_{BC} \cdot 0,6 = 0 \\ 1,0 T_{BC} - 0,4 T_{BD} = 0 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} R_{Ax} = 0 \\ R_{Ay} - 400 - 800 + R_{Ey} = 0 \\ -400 - 3.800 + 4.R_{Ey} = 0 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} F_2 + F_1 \cos 60^\circ = 0 \\ F_1 \sin 60^\circ + 500 = 0 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} 577 \cdot \cos 60^\circ + F_3 \cos 60^\circ + F_4 = 0 \\ 577 \cdot \sin 60^\circ - 400 - F_3 \sin 60^\circ = 0 \end{cases}$$

Opl. (afgerond)

a) (0,69; 1,39; 0,80)

b) Oneindig twee oplossingen: $R_{Ay} = -3R_B - 2R_A$ en $F = -2R_B - 2M_A$.

c) $R_{Ax} = 0,0667 = R_{Ay} = T_{Ax} = T_{BC}$ en $R_{Az} = 0,2$.

d) 0; 700; 500e) -577; 289 f) 115; -346.

$$2. \text{ Stel: } \begin{cases} T_{AC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - T_{AB} \cdot \frac{1}{2} = 0 \\ T_{AC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + T_{AB} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \end{cases} .$$

Ga na dat $T_{AC} = 1,46\dots$ en $T_{AB} = 1,04\dots$

$$2. \text{ Beschouw: } \begin{cases} \frac{1}{3}T_{AB} - 0,41T_{AC} + 0,51T_{AD} = 0 \\ \frac{2}{3}T_{AB} - 0,41T_{AC} - 0,51T_{AD} = 0 \\ \frac{2}{3}T_{AB} + 0,82T_{AC} + 0,69T_{AD} = 0 \end{cases} .$$

Ga na dat $T_{AB} = 5,28$, $T_{AC} = 6,44$, $T_{AD} = 1,73$.