(HOOFDSTUK 43, uit "College Mathematics", door Frank Ayres, Jr. and Philip A. Schmidt, Schaum's Series, McGraw-Hill, New York; dit is de voorbereiding voor een uit te geven Nederlandse vertaling).

Grafieken van veeltermfuncties

EEN VEELTERM van graad n in x is een uitdrukking van de vorm

$$f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + ax^2 + a_{n-1}x + a_n \qquad (43.1)$$

waarbij n een positief geheel getal is, en a_o, a_1, …, a_n, constanten zijn, reëel of complex, en $a_o \neq 0$. De term $a_o x^n$ is de *hoofdterm*, a_n de *constante term* en a_o de *hoofdcoëfficiënt.*

Ondanks het feit dat de meeste stellingen en formuleringen die volgen betrekking hebben op willekeurige veeltermen, zullen we in dit hoofdstuk onze aandacht beperken tot veeltermen waarvan de coëfficiënten (a_0, a_1, ..., a_n) gehele getallen zijn.

DE RESTSTELLING. Als $f(x)$ een veelterm is die gedeeld wordt door x - h tot wanneer een rest zonder x wordt verkregen, dan is die rest $f(h)$. Voor een bewijs, zie oefening 1.

VOORBEELD 1. Stel dat $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4$ en dat $x - h = x - 2$; dan is h=2. Door deling:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 3x - 4}{x - 2} = x^2 + 4x + 5 + \frac{6}{x-2},$$

of $x^3 + 2x^2 - 3x - 4 = (x^2 + 4x + 5)(x - 2) + 6$, en de rest is 6.
Door de reststelling, is de rest

$$f(2) = 2^3 + 2.2^2 - 3.2 - 4 = 6.$$

DE ONTBINDINGSSTELLING. x -h is een factor van f(x) als en slechts als $f(h) = 0$.
Voor een bewijs, zie oefening 2.

DELING DOOR EEN EENTERM. Volgens een proces dat onder verschillende benamingen bekend staat, laat de deling van een veelterm $f(x)$ door x -h zich uitvoeren in drie regels, als volgt:

(*1*) De te delen veelterm $f(x)$ schikken volgens de dalende orde van de machten van x (zoals hoort bij en deling) en op de eerste regel de coëfficiënten plaatsen, waarbij een nul wordt geplaatst voor een ontbrekende term.
(*2*) h, het getal in kwestie, op de eerste lijn plaatsen, rechts van de coëfficiënten.
(*3*) De hoofdcoëfficiënt a_0 kopiëren onder zichzelf op de derde lijn.
(*4*) a_0 vermenigvuldigen met h: het product a_0h op de tweede lijn plaatsen onder a_1 en de som $a_0h + a_1$ op de derde lijn onder a_1 plaatsen.
(5) De som verkregen in de vorige stap vermenigvuldigen met h; het product op de tweede lijn plaatsen onder a_2, optellen bij a_2 en de som op de derde lijn plaatsen onder a_2.
(6) De procedure van stap 5 herhalen tot wanneer een product wordt verkregen dat wordt opgeteld bij de constante term a_n.

De n eerste getallen van de derde lijn zijn de coëfficiënten van het quotiënt, een veelterm van graad n - 1 en de laatste term is de rest $f(h)$.

VOORBEELD 2. Deel $5x^4 - 8x^2 - 15x - 6$ door $x - 2$, door de delingsprocedure toe te passen.
Volgens de vorige stappen hebben we

$$\begin{array}{rrrrr|l} 5\ + & 0\ - & 8\ - & 15\ - & 6 & \underline{2} \\ & 10\ + & 20\ + & 24\ + & 18 & \\ \hline 5\ + & 10\ + & 12\ + & 9\ + & 12 & \end{array}$$

Het quotiënt is $Q(x) = 5x^3 + 10x^2 + 12x + 9$
en de rest is $f(2) = 12$.

Zie oefening 4.

DESCARTES TEKENREGEL [niet kennen].
VOORBEELD 3. [niet kennen].
VOORBEELD 4. [niet kennen].

DE GRAFIEK VAN EEN VEELTERM $y = f(x)$ kan worden verkregen door een tabel te maken die verschillende punten (x, y) vastlegt en door deze punten te verbinden door een kromme. Om nutteloos werk te vermijden bij het maken van deze tabel, raden we het volgende aan:

(*1*) Wanneer $x = 0$, is $y = f(0)$ de constante term van de veelterm.

(*2*) Gebruik het schema voor de deling om $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ... te vinden en stop van zodra de getallen op de derde rij het zelfde teken hebben.

(3) Gebruik het schema voor de deling om $f(-1)$, $f(-2)$, $f(-3)$, ... te vinden en stop van zodra de getallen op de derde rij alternerende tekens hebben.

Verder kan worden bewezen dat:

(*a*) De grafiek van een veelterm in x met gehele coëfficiënten is steeds een kromme zonder ribben.

(*b*) Het aantal doorsneden van de grafiek van een veelterm met graad n met x-as is nooit groter van n.

(*c*) Als a en b reële getallen zijn zodanig dat $f(a)$ en $f(b)$ een tegengesteld teken hebben, dan heft de grafiek een oneven aantal doorsnede met de x-as tussen $x = a$ en $x = b$.

(*d*) Als a en b reële getallen zijn zodanig dat $f(a)$ en $f(b)$ hetzelfde teken hebben, dan snijdt de grafiek de x-as niet of snijdt die de as in een even maal tussen $x = a$ en $x = b$.

Zie figuur 1.

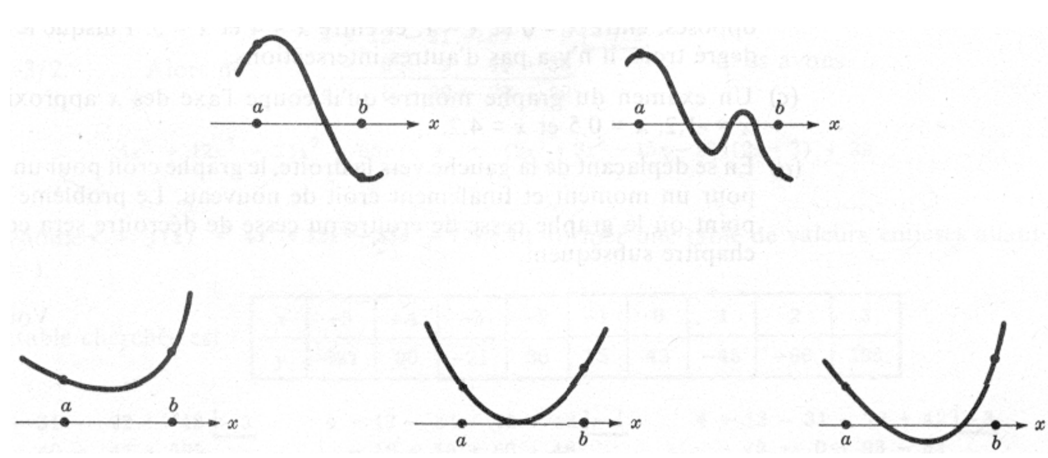
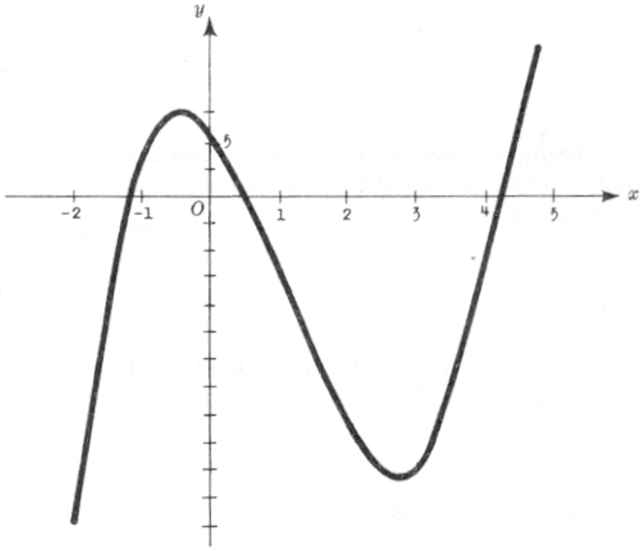


Fig. 1

VOORBEELD 5. Maak de grafiek van $y = 2x^3 - 7x^2 - 7x + 5$.

Maak de tabel

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-25	3	5	-7	-21	-25	-7	45



$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -7 & -7 & +5 & 1 \\ & 2 & -5 & -12 & \\ \hline 2 & -5 & -12 & -7 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -7 & -7 & +5 & 2 \\ & 4 & -6 & -26 & \\ \hline 2 & -3 & -13 & -21 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -7 & -7 & +5 & 3 \\ & 6 & -3 & -30 & \\ \hline 2 & -1 & -10 & -25 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -7 & -7 & +5 & 4 \\ & 8 & +4 & -12 & \\ \hline 2 & +1 & -3 & -7 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -7 & -7 & +5 & 5 \\ & 10 & +15 & +40 & \\ \hline 2 & +3 & +8 & +45 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -7 & -7 & +5 & -1 \\ & -2 & +9 & -2 & \\ \hline 2 & -9 & +2 & +3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -7 & -7 & +5 & -2 \\ & -4 & +22 & -30 & \\ \hline 2 & -11 & +15 & -25 & \end{array}$$

Fig. 2

Er kan worden opgemerkt dat:

(*a*) De getallen van de derde lijn allen niet negatief zijn voor de eerste maal wanneer $f(5)$ wordt gevonden; ze alterneren voor de eerste maal wanneer $f(-2)$ wordt gezocht.

(*b*) De grafiek snijdt de x-as tussen $x = -2$ en $x = -1$ want $f(-2)$ en $f(-1)$ hebben tegenovergestelde tekens, tussen $x = 0$ en $x = 1$, en tussen $x = 4$ en $x = 5$. Omdat de veelterm van graad drie is, zijn er geen andere doorsneden.

(*c*) Een onderzoek van de grafiek toont dat hij de x-as snijdt bij benadering in $x = -1{,}2$; $x = 0{,}5$ en $x = 4{,}2$.

(*d*) Van links naar rechts stijgt de grafiek voor een ogenblik, daalt daarna en stijgt uiteindelijk opnieuw. Het vraagstuk om te bepalen wanneer de grafiek stopt met stijgen of dalen zal beschouwd worden in een volgend hoofdstuk.

Zie oefeningen 5-9.

OPGELOSTE OEFENINGEN

1. Bewijs de reststelling: Als een veelterm $f(x)$ gedeeld wordt door $x - h$ tot wanneer een constante overblijft, dan is de rest $f(h)$.

Stel dat $Q(x)$ het quotiënt is bij de deling en R de constante rest. Dus, vermits de te delen veelterm = deler maal quotiënt + rest,

$$f(x) = (x - h)\,Q(x) + R$$

en dit is waar voor alle waarden van x. Wanneer $x = h$, hebben we

$$f(h) = (h - h)\,Q(h) + R = R.$$

2. Bewijs de factorisatiestelling: $x - h$ is een factor van $f(x)$ als en slechts als $f(h) = 0$.

Door de reststelling, $f(x) = (x - h)Q(x) + f(h)$.

Als $x - h$ een facteur is van $f(x)$, moet de rest nul zijn wanneer $f(x)$ gedeeld wordt door $x - h$. Dus, $f(h) = 0$. Omgekeerd, als $f(h) = 0$, dan is $f(x) = (x - h)Q(x)$ en is $x - h$ een factor van $f(x)$.

3. Zonder de deling uit te voeren, toon aan dat

(a) $x - 2$ een factor is van $f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

(b) $x + a$ geen factor is van $f(x) = x^n + a^n$ voor n een even positief geheel getal en $a \neq 0$.

(a) $f(2) = 2^3 - 2^2 - 14.2 + 24 = 0$ (b) $f(-a) = (-a)^n + a^n = 2a^n \neq 10$

4. Gebruik het algoritme van de deling om te delen: $4x^4 + 12x^3 - 21x^2 - 65x + 9$ door (a) $2x - 1$, (b) $2x + 3$.

(a) Schrijf de deler als $2(x - 1/2)$. Door deling met h = ½ komt er:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4 & +12 & -21 & -65 & +9 & \frac{1}{2} \\ & 2 & +7 & -7 & -36 & \\ \hline 4 & +14 & -14 & -72 & -27 & \end{array}$$

Nu is

$$\begin{aligned} 4x^4 + 12x^3 - 21x^2 - 65x + 9 &= (4x^3 + 14x^2 - 14x - 72)(x - 1/2) - 27 \\ &= (2x^3 + 7x^2 - 7x - 36)(2x - 1) - 27 \end{aligned}$$

Dus, bij deling van $f(x)$ door $h = m/n$, hebben de coëfficiënten van het quotiënt n als gemeenschappelijke factor.

(b) Hier is $h = -3/2$. Dus volgt uit

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4 & +12 & -21 & -65 & +9 & -3/2 \\ & -6 & -9 & +45 & +30 & \\ \hline 4 & +6 & -30 & -20 & +39 & \end{array}$$

dat

$$4x^4 + 12x^3 - 21x^2 - 65x + 9 = (2x^3 + 3x^2 - 15x - 10)(2x + 3) + 39.$$

5. Vorm voor de veelterm $y = f(x) = 4x^4 + 12x^3 - 31x^2 - 72x + 42$ een tabel met gehele waarden van $x = -5$ tot $x = 3$.

De gezochte tabel is

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	627	90	−21	30	75	42	−45	−66	195

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4 & +12 & -31 & -72 & +42 & -5 \\ & -20 & +40 & -45 & +585 & \\ \hline 4 & -8 & +9 & -117 & +627 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4 & +12 & -31 & -72 & +42 & -4 \\ & -16 & +16 & +60 & +48 & \\ \hline 4 & -4 & -15 & -12 & +90 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4 & +12 & -31 & -72 & +42 & -3 \\ & -12 & +0 & +93 & -63 & \\ \hline 4 & +0 & -31 & +21 & -21 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4 & +12 & -31 & -72 & +42 & -2 \\ & -8 & -8 & +78 & -12 & \\ \hline 4 & +4 & -39 & +6 & +30 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4 & +12 & -31 & -72 & +42 & -1 \\ & -4 & -8 & +39 & +33 & \\ \hline 4 & +8 & -39 & -33 & +75 & \end{array}$$

$f(0) = 42$, de constante term van de veelterm.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4 & +12 & -31 & -72 & +42 & 1 \\ & 4 & +16 & -15 & -87 & \\ \hline 4 & +16 & -15 & -87 & -45 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4 & +12 & -31 & -72 & +42 & 2 \\ & 8 & +40 & +18 & -108 & \\ \hline 4 & +20 & +9 & -54 & -66 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4 & +12 & -31 & -72 & +42 & 3 \\ & 12 & +72 & +123 & +153 & \\ \hline 4 & +24 & +41 & +51 & +195 & \end{array}$$

6. Teken de grafiek van $y = x^4 - 9x^2 + 7x + 4$.

Uit de tabel volgt dat de grafiek de x-as snijdt tussen $x = -4$ en $x = -3$, $x = -1$ en $x = 0$, $x = 1$ en $x = 2$, en $x = 2$ en $x = 3$. Op de grafiek, zijn de punten van doorsnijding bij benadering gelegen in $x = -3{,}1$; 1,4 en 2,1.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	88	−17	−30	−11	4	3	−2	25

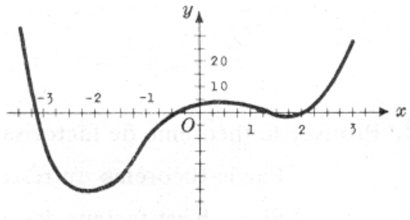


Fig. 5

7. Teken de grafiek van $y = f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 3$.

Uit de tabel (gevormd voor gehele waarden gaande van $x = -1$ tot $x = 5$) volgt dat de grafiek de x-as snijdt tussen $x = 0$ en $x = 1$. Als er twee andere punten van doorsnijding zouden zijn, dan moeten ze liggen tussen $x = 1$ en $x = 3$, vermits de grafiek op dit interval stijgt van $x = 1$, dan daalt, en uiteindelijk opnieuw stijgt links van $x = 3$.

Door andere punten op die interval te berekenen (enkele worden getoond in de tabel) worden we ertoe gebracht te veronderstellen date r geen andere snijpunten zijn (zie grafiek hiernaast). Merk op dat zelfs al zouden we de exacte punten lokaliseren waar de grafiek stopt met stijgen of met dalen, dat deze punten niet noodzakelijk nuttig zouden zijn.

x	−1	0	1	5/4	3/2	7/4	2	9/4	5/2	11/4	3	4	5
y	−17	−3	1	73/64	9/8	67/64	1	69/64	11/8	127/64	3	13	37

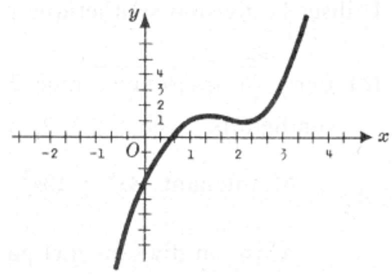


Fig. 4

8. Teken de grafiek van $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$.

Uit de tabel zien we dat de grafiek de x-as snijdt in $x = -2$ en deze opnieuw tegenkomt in $x = 3$. Als er een derde punt van doorsnijding is, moet er een zijn tussen $x = 2$ en $x = 3$ of tussen $x = 3$ en $x = 4$. Door andere punten te berekenen op dit interval worden we ertoe gebracht te veronderstellen dat er geen derde punt van doorsnijding met de x-as is.

Deze functie werd gekozen om het vraagstuk van de doorsnijdingen te besluiten. Wanneer $f(x)$ gedeeld wordt door $x + 2$, is het quotiënt gelijk aan $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ en is de rest nul. Dus is $f(x) = (x + 2)(x - 3)^2$ de vorm na ontbinding in factoren. Het spreekt nu vanzelf dat de functie positief is voor $x > -2$, d. w. z. dat de zich nooit onder de x-as bevindt op dit interval. Dus is de grafiek rakend aan de x-as in $x = 3$, en het raakpunt telt voor twee “doorsnijdingen” met de x-as.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	−36	0	16	18	12	4	0	6	28

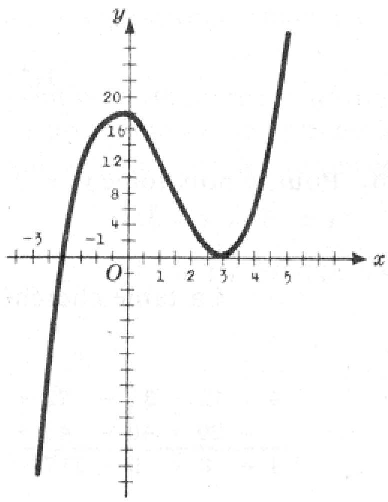


Fig. 5

9. Teken de grafiek van $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

Uit de tabel volgt dat de grafiek de x-as snijdt in $x = 2$ en dat hij symmetrisch is ten opzichte van dit punt (d. w. z. dat $f(2 + h) = -f(2 - h)$. Veronderstellen we dat de grafiek de x-as snijdt rechts van $x = 2$. Dan, omdat $f(x)$ positief is voor $x = 3, 4, 5$ en $x \geq 6$, is de grafiek rakend in dit punt of snijdt de as twee maal in twee opeenvolgende waarden die zich in de tabel bevinden. Maar in dit laatste geval, zou, door symmetrie, de grafiek dan $2 + 2 + 1 = 5$ doorsnijdingen hebben met de x-as en dit is onmogelijk.

Wanneer $f(x)$ gedeeld wordt door $x - 2$, is het quotiënt $x^2 - 4x + 4 - 8 = (x-2)^2$ en is de rest nul. Dus is $f(x) = (x - 2)^3$. Nu is het duidelijk dat de grafiek zich boven de x-as bevindt wanneer $x > 2$ en onder de x-as wanneer $x < 2$. Bij het bepalen van de doorsnijdingen van de grafiek en de x-as, moet het punt $x = 2$ dus drie maal worden geteld.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
y	−64	−27	−8	−1	0	1	8	27	64

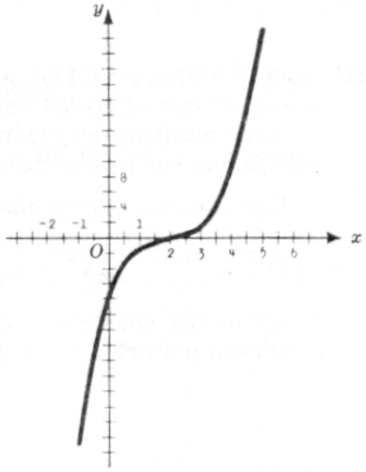


Fig. 6

SUPPLEMENTAIRE OEFENINGEN

10. Gegeven $f(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 13x - 2$, gebruik het algoritme van de deling om te bepalen:
(*a*) $f(2) = 0$ (*b*) $f(4) = 410$ (*c*) $f(-2) = -28$ (*d*) $f(-3) = -80$

11. Gebruik het algoritme van de deling om het quotiënt en de rest te bepalen wanneer:
(*a*) $2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 11x - 10$ gedeeld wordt door $x - 2$. (*b*) $3x^4 + 11x^3 + 7x^2 - 8$ gedeeld wordt door $x + 2$.
Antw.: (*a*) $2x^3 + x^2 - 4x + 3$; -4 (*b*) $3x^3 + 5x^2 - 3x + 6$; -20.

12. Gebruik het algoritme van de deling om aan te tonen:
(*a*) $x + 2$ en $3x - 2$ zijn factoren van $3x^4 - 20x^3 + 80x - 48$.
(*b*) $x - 7$ en $3x + 5$ zijn geen factoren van $6x^4 - x^3 - 94x^2 + 74x + 35$.

13. Maak een tabel van waarden en teken de grafiek van:
(*a*) $y = x^3 - 13x + 12$ (*c*) $y = 3x^3 + 5x^2 - 4x - 3$ (*e*) $y = -x^3+13x+12$
(*b*) $y = 2x^3 + x^2 - 12x - 5$ (*d*) $y = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$

14. Teken de grafiek van:
(*a*) $y = x(x^2 - 4)$ (*b*) $y = x(4 - x^2)$. (*c*) $y = x(x - 2)^2$. (*d*) $y = x(2- x)^2$.

15. [Niet]