(HOOFDSTUK 2, uit "Theory and problems of Vector Analysis", door Murray, R. Spiegel, Schaum's Series, McGraw-Hill, New York).

Scalair en vectorieel product

SCALAIR PRODUCT. Het scalair product (of *inwendig* product) van twee vectoren **A** en **B**, genoteerd met $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ (lees: "**A** scalair **B**"), is product van vermenigvuldiging van de lengtes van **A** en van **B** met de cosinus van de hoek θ die ze met elkaar vormen. Notatie:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A.B.\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \pi.$$

Merk op dat $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ een getal is (een scalair, vandaar de benaming) en geen vector.

De volgende eigenschappen zijn voldaan:

1. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ — Commutativiteit de het scalair product
2. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ — Distributiviteit
3. $m(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (m\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(m\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})m$ — waarin m een getal is.
4. $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0$ en $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$.
5. Als $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ en $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, dan
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2 = A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + A_3^{\,2}$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = B^2 = B_1^{\,2} + B_2^{\,2} + B_3^{\,2}$$
6. Als $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$ en als **A** en **B** niet-nul vectoren zijn, dan staan **A** en **B** loodrecht op elkaar.

HET VECTORPRODUCT. Het vectorproduct (of uitwendig product) van twee vectoren **A** en **B** is de vector $\mathbf{C} = \mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$ (lees **A** vectorieel **B**). De lengte van $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$ wordt gedefinieerd als het product van de lengtes van **A** en van **B** met de sinus van de hoek θ die ze met elkaar vormen. De richting van de vector $\mathbf{C} = \mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$ is deze van de loodrechte op het vlak van de vectoren **A** en **B**, en zijn zin is zodanig dat **A**, **B** en **C** een rechtshandig systeem vormen. Notatie:

$$\mathbf{A}\wedge\mathbf{B} = A.B.\sin\theta\,\mathbf{u} \qquad 0 \le \theta \le \pi,$$

waar **u** een eenheidsvector is die de richting en de zin van $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$ aangeeft. Als $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ of wanneer **A** evenwijdig is met **B**, dan is $\sin\theta = 0$ en "definieert" met $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B} = \mathbf{o}$.

De volgende eigenschappen gelden

1. $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B} = -\,\mathbf{B}\wedge\mathbf{A}$ — (Anti-commutativiteit van het vectorproduct)
2. $\mathbf{A}\wedge(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\wedge\mathbf{B} + \mathbf{A}\wedge\mathbf{C}$ — Distributiviteit.
3. $m(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}) = m(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}) = \mathbf{A}\wedge(m\mathbf{B}) = \mathbf{A}\wedge(\mathbf{B}\mathrm{m})$ — waar m een getal is.
4. $\mathbf{i}\wedge\mathbf{i} = \mathbf{j}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{k}\wedge\mathbf{k} = \mathbf{o}$, $\mathbf{i}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j}\wedge\mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k}\wedge\mathbf{i} = \mathbf{j}$.
5. Als $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ en $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, dan is

$$\mathbf{A}\wedge\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}.$$

6. De lengte van $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$ is gelijk aan de oppervlakte van het parallellogram met zijden A en B.
7. Als $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B} = \mathbf{o}$, en als $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ niet-nul vectoren zijn, dan zijn $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ parallel.

OPGELOSTE OEFENINGEN

SCALAIR PRODUCT.

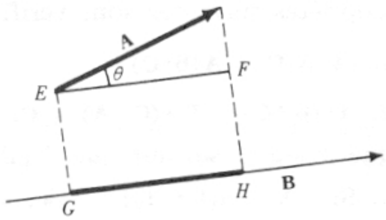
1. Aantonen dat $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A.B \,.\, \cos\theta = B.A \,.\, \cos\theta = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

Hiermee is dus de commutativiteit van het scalair product geverifieerd.

2. Aantonen dat de projectie van **A** op **B** gelijk is aan $\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}$, waar **b** een eenheidsvector is gericht volgens **B**.

Door de oorsprong en het einde van **A** gaan vlakken loodrecht op **B** die steunen in de punten G en H respectievelijk, zoals aangegeven op de figuur hiernaast. Dus is de projectie van **A** op $\mathbf{B} = GH = EF = A\cos\theta = \mathbf{A}\cdot\mathbf{b}$.



3. Aantonen dat $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$.

Zij **a** een eenheidsvector gericht volgens **A**; dan is:
projectie van (**B** + **C**) op **A** = proj. van **B** op **A** + proj. van **C** op **A**

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{a}$$

Door vermenigvuldiging met het getal A,

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot A\mathbf{a} = \mathbf{B}\cdot A\mathbf{a} + \mathbf{C}\cdot A\mathbf{a}$$

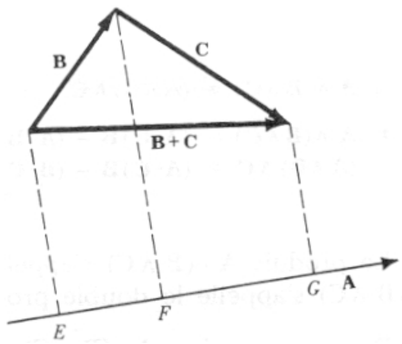
en

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}$$

Door de commutativiteit van het scalair product:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$$

Zodat de distributiviteit werd gecontroleerd.



4. Aantonen dat $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{D}$.

Volgens oefening 3, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) + \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{D}$

De algebraïsche bewerkingen zijn geldig voor scalaire producten.

5. Evalueer elk van de volgende uitdrukkingen

(*a*) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = |\,\mathbf{i}\,|\,|\,\mathbf{i}\,|\cos 0° = (1)(1)(1) = 1$
(*b*) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = |\,\mathbf{i}\,|\,|\,\mathbf{k}\,|\cos 90° = (1)(1)(0) = 0$
(*c*) $\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = |\,\mathbf{k}\,|\,|\,\mathbf{j}\,|\cos 90° = (1)(1)(0) = 0$
(*d*) $\mathbf{j}\cdot(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \mathbf{j}\cdot 2\mathbf{i} - \mathbf{j}\cdot 3\mathbf{j} + \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0 - 3 + 0 = -3$
(*e*) $(2\mathbf{i} - \mathbf{j})\cdot(3\mathbf{i} + \mathbf{k}) = 2\mathbf{i}\cdot(3\mathbf{i} + \mathbf{k}) - \mathbf{j}\cdot(3\mathbf{i} + \mathbf{k}) = 2\mathbf{i}\cdot 3\mathbf{i} + 2\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} - \mathbf{j}\cdot 3\mathbf{i} - \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}) = 6 + 0 - 0 - 0 = 6$

6. Als $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ en $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, toon aan dat dan $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k})\\ &= A_1\mathbf{i}\cdot(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + A_2\mathbf{j}\cdot(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + A_3\mathbf{k}\cdot(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k})\\ &= A_1B_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + A_1B_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + A_1B_3\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + A_2B_1\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + A_2B_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + A_2B_3\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} + A_3B_1\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + A_3B_2\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + A_3B_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\end{aligned}$$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$.

Immers, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$ en alle andere scalaire producten zijn nul.

7. Als $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ toon dan dat $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$.

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = (A)(A)\cos 0° = A^2$. Dus $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}$

En $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$

$= A_1A_1 + A_2A_2 + A_3A_3 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$

volgens oefening 6, door $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ te nemen:

Dan $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$ is de lengte van $\mathbf{A}$. Soms wordt $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$ geschreven als $\mathbf{A}^2$.

8. Bepaal de hoek gevormd door $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ en $\mathbf{B} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A.B\cos\theta$, $A = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}$, $B = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (2)(6) + (2)(-3) + (-1)(2) = 12 - 6 - 2 = 4$

Dus is $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \dfrac{4}{(3)(7)} = \dfrac{4}{21} = 0{,}1905$ en $\theta = 79°$, benaderend.

9. Als $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$ en A en B niet nul zijn, toon dan aan dat $\mathbf{A}$ loodrecht staat op $\mathbf{B}$.

Als $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta = 0$, dan is $\cos\theta = 0°$ of $\theta = 90°$. Omgekeerd, als $\theta = 90°$, is $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$.

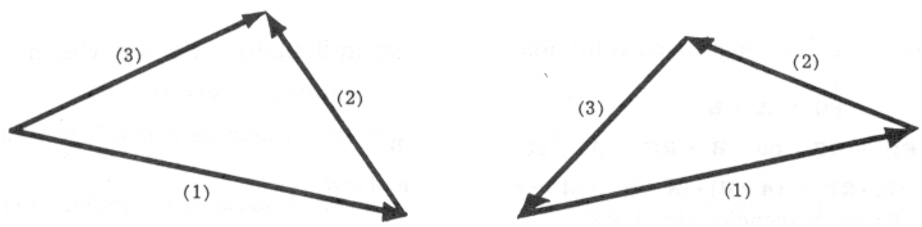
10. Bepaal de waarde van a zodanig dat $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + a\mathbf{j} + \mathbf{k}$ en $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ loodrecht op elkaar staan.

Volgens oefening 9, zijn $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ orthogonaal als $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$.

Dan $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (2)(4) + (a)(-2) + (1)(-2) = 8 - 2a - 2 = 0$ voor $a = 3$.

11. Toon aan dat de vectoren $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ een rechthoekige driehoek vormen.

We moeten eerst aantonen dat de vectoren een driehoek vormen. Volgens de figuren



(*a*) (*b*)

ziet men dat de vectoren een driehoek vormen indien aan een van de volgende voorwaarden is voldaan:
(*a*) een van de vectoren, (3) bijvoorbeeld, is de resultante of de som van (1) en (2),
of (*b*) de som of de resultante van de vectoren (1), (2) en (3) is nul,
naargelang
(*a*) twee vectoren een gemeenschappelijk einde hebben,
of (*b*) geen van de vectoren een gemeenschappelijk einde heeft met een andere. Hier vinden we dan door even te proberen dat $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ en zo vormen de vectoren wel degelijk een driehoek.
Omdat $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (3)(1) + (-2)(-3) + (1)(5) = 14$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} = (3)(2) + (-2)(1) + (1)(-4) = 0$, en $\mathbf{B}.\mathbf{C} = (1)(2) + (-3)(1) + (5)(-4) = -21$, volgt er dat $\mathbf{A}$ en $\mathbf{C}$ loodrecht op elkaar en de driehoek rechthoekig is.

12. De hoeken vinden die de vector $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ maakt met de coördinaatsassen.

Zij α, β, γ, de hoeken gevormd door **A** en de positieve richtingen van de *x, y, z* assen respectievelijk.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{i} = (A)(1)\cos\alpha = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + (2)^2}\,\cos\alpha = 7\cos\alpha$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{i} = (3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k})\cdot\mathbf{i} = 3\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} - 6\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + 2\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 3$$

Dan is $\cos\alpha = 3/7 = 0{,}4286$, en $\alpha = 64{,}6°$ bij benadering.

Op dezelfde wijze is $\cos\beta = -6/7$, $\beta = 149°$ en $\cos\gamma = 2/7$, $\gamma = 73{,}4°$.

De cosinussen van α, β, en γ heten de richtingscosinussen van **A**. (zie ook oefening 27 uit het vorige hoofdstuk).

13. Bepaal de projectie van de vector $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ op de vector $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

Een eenheidsvector gericht volgens **B** is $\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{B}}{b} = \dfrac{4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 7^2}} = \dfrac{4}{9}\mathbf{i} - \dfrac{4}{9}\mathbf{j} + \dfrac{7}{9}\mathbf{k}$.

De projectie van **A** op de vector $\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})\cdot(\dfrac{4}{9}\mathbf{i} - \dfrac{4}{9}\mathbf{j} + \dfrac{7}{9}\mathbf{k})$

$$= 1.\frac{4}{9} + (-2).(-\frac{4}{9}) + 1.\frac{7}{9} = \frac{19}{9}$$

14. De cosinusregel voor vlakken driehoeken aantonen.

Volgens de figuur (*a*) hieronder is $\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{A}$ of $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$.

Dus is $\mathbf{C}\cdot\mathbf{C} = (\mathbf{A} - \mathbf{B})\cdot(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} - 2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

en dus $C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$.

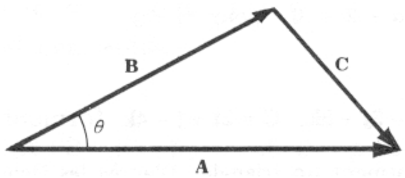


Fig. (*a*)

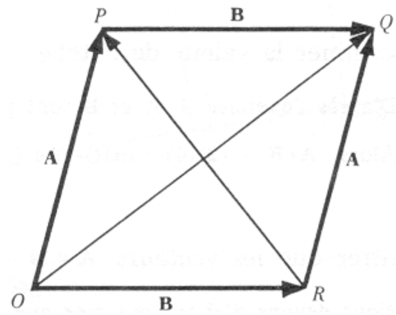


Fig. (*b*)

15. Aantonen dat de diagonalen van een ruit loodrecht staan.

Vergelijk met de figuur (*b*) hierboven

$\mathbf{OQ} = \mathbf{OP} + \mathbf{PQ} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

$\mathbf{OR} + \mathbf{RP} = \mathbf{OP}$ of $\mathbf{B} + \mathbf{RP} = \mathbf{A}$ en $\mathbf{RP} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$

Dan is $\mathbf{OQ}\cdot\mathbf{RP} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\cdot(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = A^2 - B^2 = 0$, want $A = B$

Dus staat **OQ** loodrecht op **RP**.

16. Bepaal een eenheidsvector loodrecht op het vlak van $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ en $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Stel dat $\mathbf{C} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ een vector is loodrecht op het vlak bepaald door **A** en **B**. Dan moet **C** loodrecht staan op **A** en loodrecht staan op **B**. Dus:

$\mathbf{C}\cdot\mathbf{A} = 0 = 2c_1 - 6c_2 - 3c_3$ en dus (*1*) $2c_1 - 6c_2 = 3c_3$

$\mathbf{C}\cdot\mathbf{B} = 0 = 4c_1 + 3c_2 - c_3$ en dus (*2*) $4c_1 + 3c_2 = c_3$

Door (*1*) en (*2*) tegelijk op te lossen volgt $c_1 = c_3/2$ en $c_2 = -c_3/3$, $\mathbf{C} = c_3(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \mathbf{k})$.

Dus is een eenheidsvector gericht volgens **C** gegeven door $\dfrac{\mathbf{C}}{C} = \dfrac{c_3\left(\frac{1}{2}\mathbf{i}-\frac{1}{3}\mathbf{j}+\mathbf{k}\right)}{\sqrt{c_3\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+1^2\right]}} = \pm\left(\frac{3}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}\right)$.

17. Bepaal de arbeid verricht door de verplaatsing van een voorwerp langs de vector $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ indien de kracht die wordt toegepast $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ is.

Vergelijk met de figuur (*a*).

Verrichte arbeid = (grootte van de kracht in de richting van de beweging) (afgelegde afstand)
= $(F\cos\theta)\,(r)$
= $\mathbf{F}\cdot\mathbf{r} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})\cdot(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = 6 - 2 + 5 = 9$.

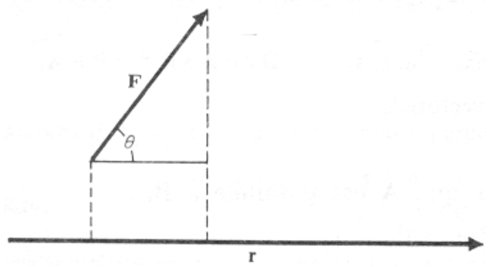


Fig. (*a*)

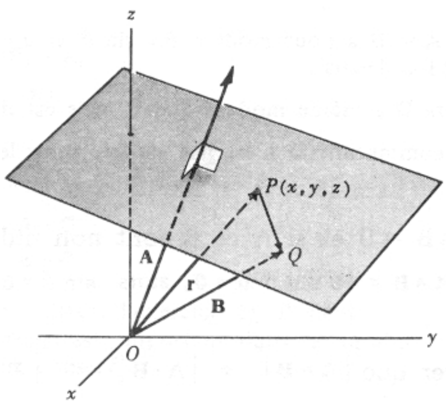


Fig. (*b*)

18. Bepaal de vergelijking van het vlak loodrecht aan de vector $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ en gaande door het einde van de vector $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ (Zie de figuur (*b*) hierboven).

Niet kunnen

19. Bepaal de afstand van de oorsprong tot het vlak in oefening 18.

Niet kunnen

20. Als **A** een willekeurige vector is, toon dan aan dat $\mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$.

Omdat $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{i} = A_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + A_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + A_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = A_1$ en analoog $\mathbf{A}\cdot\mathbf{j} = A_2$ en $\mathbf{A}\cdot\mathbf{k} = A_3$.

Dan $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$.

VECTORPRODUCT.

21. Aantonen dat $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = -\,\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$.

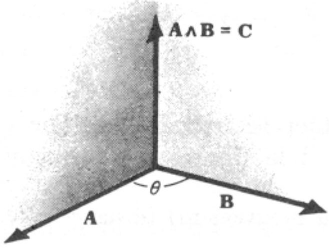


Fig.(*a*)

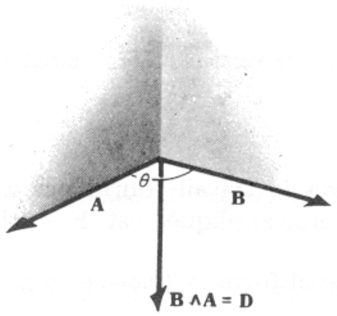


Fig.(*b*)

$\mathbf{A}\wedge\mathbf{B} = \mathbf{C}$ heeft als lengte $AB\sin\theta$ en heeft een zin zodanig dat **A**, **B** en **C** een rechtshandig orthogonaal assenstelsel vormen. (Fig. (*a*) hierboven).
$\mathbf{B}\wedge\mathbf{A} = \mathbf{D}$ heeft als lengte $BA\sin\theta$ en heeft een zin zodanig dat **B**, **A** en **D** een rechtshandig orthogonaal assenstelsel vormen. (Fig. (*b*) hierboven).
Dus heeft **D** dezelfde lengte als **C** maar staat hij in tegenovergestelde zin, d. w. z. $\mathbf{C} = -\mathbf{D}$ of $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = -\,\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$.
De commutativiteit geldt niet voor vectorproducten.

22. Als $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{o}$ en als **A** en **B** niet nul zijn, toon dan aan dat **A** dan evenwijdig is aan **B**.
Als $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B} = AB\sin\theta\,\mathbf{u} = \mathbf{o}$, dan is $\sin\theta = 0$ en dus $\theta = 0°$ of $\theta = 180°$.

23. Aantonen dat $|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2\,|\mathbf{B}|^2$.

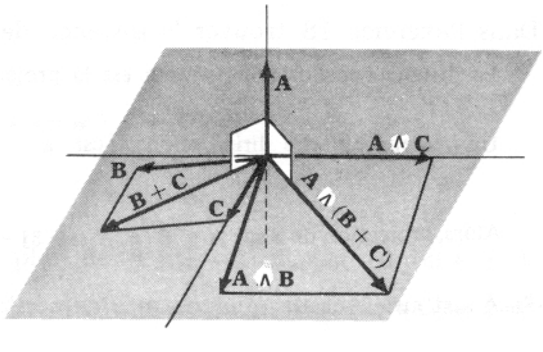
$$|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2 = |AB\sin\theta\,\mathbf{u}|^2 + |AB\cos\theta|^2 = A^2B^2\sin^2\theta + A^2B^2\cos^2\theta$$
$$= A^2B^2 = |\mathbf{A}|^2\,|\mathbf{B}|^2.$$

24. Evalueer elk van de volgende uitdrukkingen:

(*a*) $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$	(*f*) $\mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{o}$
(*b*) $\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}$	(*g*) $\mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{j}$
(*c*) $\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$	(*h*) $(2\mathbf{j}) \wedge (3\mathbf{k}) = 6\,\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = 6\mathbf{i}$
(*d*) $\mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{i}$	(*i*) $(3\mathbf{i}) \wedge (-2\mathbf{k}) = -6\,\mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = 6\mathbf{j}$
(*e*) $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{o}$	(*j*) $2\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} - 3\mathbf{k} = -2\mathbf{k} - 3\mathbf{k} = -5\mathbf{k}$

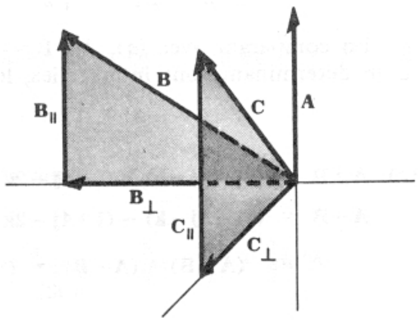
25. Als **A** loodrecht staat op **B** en op **C**, toon dan aan dat $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}$.

Omdat **A** loodrecht staat op **B**, is $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ een vector loodrecht op het vlak van **A** en **B**, met lengte $AB \sin 90° = AB$ of dus met de lengte van $A\mathbf{B}$. Dit is equivalent met de vermenigvuldiging van de vector **B** met A en een draaiing van 90° van de resulterende vector, die deze in positie brengt aangegeven in de figuur hiernaast.
Op dezelfde wijze is $\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}$ de vector verkregen door **C** met A te vermenigvuldigen en een draaiing van 90° toe te passen op deze vector zodat die in de aangegeven positie komt.
Op analoge wijze is $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ de vector verkregen door $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ te vermenigvuldigen met A en door een draaiing toe te passen van 90° van de vector zodat die in de aangegeven positie komt.



Omdat $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ de diagonaal is van het parallellogram waarvan $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ en $\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}$ de zijden zijn, kunnen we besluiten dat $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\wedge\mathbf{B} + \mathbf{A}\wedge\mathbf{C}$.

26. In het algemeen geval, waar **A**, **B** en **C** niet coplanair zijn, toon dan aan dat $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}$.



Ontbind **B** in twee vectorcomposanten, waarvan een loodrecht staat op **A** en de ander evenwijdig is met **A**, en noteer deze met $\mathbf{B}_\perp$ en $\mathbf{B}_{//}$ respectievelijk. Dan is $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_{//}$.

Als θ de hoek is gevormd door **A** en **B**, dan is $\mathbf{B}_\perp = B \sin\theta$. Op deze wijze is de lengte van $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}_\perp$ gelijk aan $AB \sin\theta$, net zoals deze van $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$. De richting en de zin van $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ zijn ook identiek aan deze van $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$. Dus is $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}_\perp = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$.

Op dezelfde wijze, is, als **C** zich laat ontbinden volgens twee vectoriële composanten $\mathbf{C}_\perp$ en $\mathbf{C}_{//}$, evenwijdig aan en loodrecht op respectievelijk **A**, dan $\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}_\perp = \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}$.

Dus, omdat $\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_{//} + \mathbf{C}_\perp + \mathbf{C}_{//} = (\mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp) + (\mathbf{B}_{//} + \mathbf{C}_{//})$ volgt er dat

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp) = \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

Nu zijn $\mathbf{B}_\perp$ en $\mathbf{C}_\perp$ vectoren die loodrecht staan op **A** en dus volgens oefening 25,

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}_\perp + \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}_\perp$$

Dus

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}.$$

en dus is de distributiviteit geverifieerd. Door een vermenigvuldiging met -1 en gebruik te maken van oefening 21, komt er dan $(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \wedge \mathbf{A} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{A} + \mathbf{C} \wedge \mathbf{A}$. Merk op dat de volgorde van de factoren van belang is in het vectorproduct. De gebruikelijke wetten van de algebra laten zich alleen toepassen als de orde wordt bewaard.

27. Als $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ en $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, dan is $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \wedge (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) \\
&= A_1\mathbf{i} \wedge (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + A_2\mathbf{j} \wedge (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + A_3\mathbf{k} \wedge (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) \\
&= A_1\mathbf{i} \wedge B_1\mathbf{i} + A_1\mathbf{i} \wedge B_2\mathbf{j} + A_1\mathbf{i} \wedge B_3\mathbf{k} + A_2\mathbf{j} \wedge B_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} \wedge B_2\mathbf{j} + A_2\mathbf{j} \wedge B_3\mathbf{k} + A_3\mathbf{k} \wedge B_1\mathbf{i} + A_3\mathbf{k} \wedge B_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} \wedge B_3\mathbf{k} \\
&= A_1B_1\mathbf{o} + A_1B_2\mathbf{k} + A_1B_3(-\mathbf{j}) + A_2B_1(-\mathbf{k}) + A_2B_2\mathbf{o} + A_2B_3\mathbf{i} + A_3B_1\mathbf{j} + A_3B_2(-\mathbf{i}) + A_3B_3\mathbf{o} \\
&= (A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\mathbf{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

28. Als $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ en $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, vind dan (*a*) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, (*b*) $\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$, (*c*) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

(*a*) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \wedge (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

Andere methode.

$$\begin{aligned}
(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \wedge (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) &= 2\mathbf{i} \wedge (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) - 3\mathbf{j} \wedge (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) - \mathbf{k} \wedge (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \\
&= 2\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} + 2\mathbf{i} \wedge 4\mathbf{j} - 2\mathbf{i} \wedge 2\mathbf{k} - 3\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} - 3\mathbf{j} \wedge 4\mathbf{j} + 3\mathbf{j} \wedge 2\mathbf{k} - \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} - \mathbf{k} \wedge 4\mathbf{j} + \mathbf{k} \wedge 2\mathbf{k} \\
&= \mathbf{o} + 8\mathbf{k} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k} - \mathbf{o} + 6\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{i} + \mathbf{o} = 10\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 11\mathbf{k}
\end{aligned}$$

(b) $\mathbf{B} \wedge \mathbf{A} = (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \wedge (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -10\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$

Door vergelijking met (a), blijkt $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = -\,\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$. Merk opdat dit equivalent is met de stelling: “Als twee lijnen van een determinant worden omgewisseld, verandert de determinant van teken."

(b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) + (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \mathbf{i} - 7\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Dus is $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = (3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix}$

$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -20\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 22\mathbf{k}$

Andere methode

$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \mathbf{B} \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{B})$
$= \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} - \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{B} \wedge \mathbf{A} - \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{o} - \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} - \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} - \mathbf{o} = -2\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$
$= -2(10\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 11\mathbf{k}) = -20\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 22\mathbf{k}$ door gebruik te maken van (a).

29. Als $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, en $\mathbf{C} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, bepaal dan ($a$) $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}$, ($b$) $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$.

(a) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

En dus $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} = (-\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 24\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{B} \wedge \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k} = -\,5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

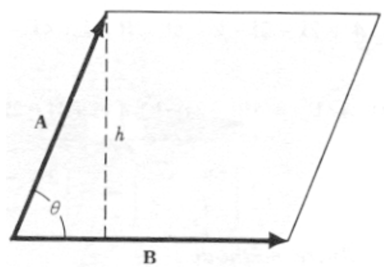
En dus $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \wedge (-\,5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 15\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 15\mathbf{k}$.

Dus is $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} \neq \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$ wat illustreert dat het noodzakelijk is om in de uitdrukking $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}$ haakjes te plaatsen om dubbelzinnigheid te vermijden.

30. Aantonen dat de oppervlakte van een parallellogram met zijden **A** en **B** gelijk is aan $|\,\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}\,|$.

De oppervlakte van het parallellogram $= h\,|\,\mathbf{B}\,|$
$= |\,\mathbf{A}\,|\sin\theta|\,\mathbf{B}\,|$
$= |\,\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}\,|$

Merk op dat de oppervlakte van een driehoek met zijden **A** en **B** = 1/2$|\,\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}\,|$.



31. Bepaal de oppervlakte van een driehoek met hoekpunten $P(1,3,2)$, $Q(2,-1,1)$, $R(-1,2,3)$.

$\mathbf{PQ} = (2-1)\mathbf{i} + (-1-3)\mathbf{j} + (1-2)\mathbf{k} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$,
$\mathbf{PR} = (-1-1)\mathbf{i} + (2-3)\mathbf{j} + (3-2)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Door oefening 30,

Oppervlakte van de driehoek = ½ | **PQ** ∧ **PR** | = ½ | (**i** - 4**j** - **k**) ∧ (-2**i** – **j** + **k**) |

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\,|-5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 9\mathbf{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2 + 1^2 + (-9)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{107}.$$

32. Bepaal een eenheidsvector loodrecht op het vlak van **A** = 2**i** - 6**j** - 3**k** en **B** = 4**i** + 3**j** - **k**.

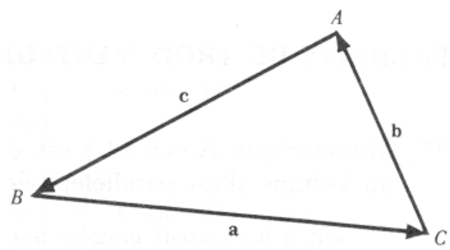
A ∧ **B** is een vector loodrecht op het vlak van **A** en **B**.

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k}$$

Een eenheidsvector evenwijdig aan **A** ∧ **B** is $\frac{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}|} = \frac{15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k}}{\sqrt{15^2 + (-10)^2 + 30^2}} = \frac{3}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$.

Een andere eenheidsvector in tegengestelde zin is (-3**i** + 2**j** - 6**k**)/7.
Vergelijk dit met oefening 16.

33. Toon de sinusregel aan voor vlakke driehoeken.



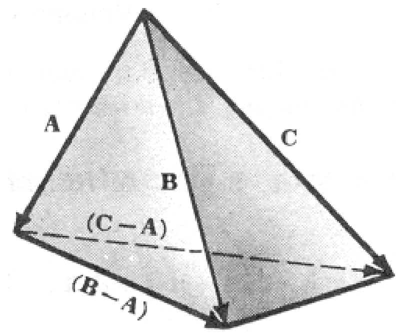
Stel dat **a**, **b** en **c** de zijden zijn van een driehoek *ABC* zoals aangegeven in de figuur; dan is **a** + **b** + **c** = **o**. Door achtereenvolgens te vermenigvuldigen met **a** ∧, **b** ∧, en **c** ∧, verkrijgen we

a ∧ **b** = **b** ∧ **c** = **c** ∧ **a**

d. w. z. $ab \sin C = bc \sin A = ca \sin B$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

34. Gegeven een tetraëder met zijvlakken F_1, F_2, F_3, F_4, en $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ en $\mathbf{V}_4$ vectoren waarvan de lengtes gelijk aan de oppervlakten van F_1, F_2, F_3, F_4 en die gericht zijn volgens loodlijnen op deze zijvlakken, naar buiten toe. Toon aan dat $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 = \mathbf{o}$.



Volgens oefening 30 wordt de oppervlakte van een zijvlak van een driehoek bepaald door **R** en **S** gegeven door ½|**R**∧**S**|. De vectoren geassocieerd aan elk van de zijvlakken van de tetraëder zijn:

$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{2}\,\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$, $\mathbf{V}_2 = \frac{1}{2}\,\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}$, $\mathbf{V}_3 = \frac{1}{2}\,\mathbf{C}\wedge\mathbf{A}$, $\mathbf{V}_4 = \frac{1}{2}\,(\mathbf{C} - \mathbf{A}) \wedge (\mathbf{B} - \mathbf{A})$.

Dan is $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 = \frac{1}{2}\,[\,\mathbf{A}\wedge\mathbf{B} + \mathbf{B}\wedge\mathbf{C} + \mathbf{C}\wedge\mathbf{A} + (\mathbf{C} - \mathbf{A})\wedge(\mathbf{B} - \mathbf{A})\,]$
$= \frac{1}{2}\,[\,\mathbf{A}\wedge\mathbf{B} + \mathbf{B}\wedge\mathbf{C} + \mathbf{C}\wedge\mathbf{A} + \mathbf{C}\wedge\mathbf{B} - \mathrm{C}\wedge\mathbf{A} + \mathrm{A}\wedge\mathbf{B} + \mathbf{A}\wedge\mathbf{A}] = \mathbf{o}$.

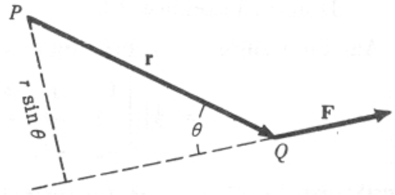
Dit resultaat kan worden veralgemeend tot een gesloten veelvlak en in zekere gevallen tot elk gesloten oppervlak. Door deze toepassing, is het soms aangewezen om een richting te geven aan een oppervlak, en men spreekt dan van een "vector van een oppervlak".

35. Bepaal de uitdrukking van het moment van een kracht **F** met betrekking tot een punt *P*.

Het moment **M** van **F** met betrekking tot *P* heeft een lengte gelijk aan *F* vermenigvuldigd met de afstand van P tot de richting van F. Dus, als **r** de vector is die *P* verbindt met de oorsprong *Q* van **F**:

$M = F\,(r \sin\theta) = rF \sin\theta = |\,\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}\,|$

Als we in P een kurkentrekker plaatsen loodrecht op het vlak van $\mathbf{r}$ en $\mathbf{F}$, dan zal wanneer de kracht zich uitoefent de kurkentrekker zich verplaatsen in de richting van $\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$. Daarom is een gepast het moment te definiëren als de vector $\mathbf{M} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$.



36. Een vast lichaam draait rondom een as door O aan een hoeksnelheid ω. Toon aan dat de (lineaire) snelheid $\mathbf{v}$ van een punt P van het lichaam, met een positievector $\mathbf{r}$, gegeven wordt door $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$, waar $\boldsymbol{\omega}$ de vector is met lengte ω waarvan de richting en de zin deze zijn van de verplaatsing van een kurkentrekker in de richting van de gegeven draaiing.

<u>Niet kunnen</u>

SUPPLEMENTAIRE OEFENINGEN

55. Evalueer: (*a*) **k** · (**i** + **j**), (*b*) (**i** - 2**k**) · (**j** + 3**k**), (*c*) (2**i** – **j** + 3**k**) · (3**i** + 2**j** - **k**).
Antw.: (*a*) 0 (*b*) -6 (*c*) 1

56. Als **A** = **i** + 3**j** - 2**k** en B = 4**i** - 2**j** + 4**k**. Bepaal:
(*a*) **A**·**B**, (*b*) *A*, (*c*) *B*, (*d*) |3**A**+2**B**|, (*e*) (2**A** + **B**) · (**A** - 2**B**).
Antw.: (*a*) -10 (*b*) $\sqrt{14}$ (*c*) 6 (*d*) $\sqrt{150}$ (*e*) -14

57. Bepaal de hoek gevormd door: (*a*) **A** = 3**i** + 2**j** - 6**k** en **B** = 4**i** - 3**j** + **k**. (*b*) **C** = 4**i** - 2**j** + 4**k** en **D** = 3**i** - 6**j** - 2**k**.
Antw. : (*a*) 90° (*b*) arc cos 8/21 = 67°36'

58. Voor welke waarden van *a* staan **A** = a**i** - 2**j** + **k** en **B** = 2a**i** + a**j** - 4**k** loodrecht op elkaar? *Antw.* : *a* = 2, -1.

59. Bepaal de scherpe hoeken die de rechte vormt die gaat door de punten (1, -3, 2) en (3, -5, 1) met de coördinaatassen. *Antw.* : arc cos 2/3, arc cos 2/3, arc cos 1/3 of 48°12', 48°12', 70°32'.

60. Bepaal de richtingscosinussen van de rechte gaande door de punten (3, 2 , -4) en (1, -1, 2).
Antw. : 2/7, 3/7, -6/7 of -2/7, -3/7, 6/7.

61. Twee hoeken van een driehoek worden gevormd door de vectoren **A** = 3**i** + 6**j** - 2**k** en **B** = 4**i** - **j** + 3**k**. Bepaal de hoeken van de driehoek. *Antw.*: arc cos $7/\sqrt{75}$, arc cos $\sqrt{26}/\sqrt{75}$, 90° of 36°4', 53°56', 90°.

62. De diagonalen van een parallellogram worden gegeven door **A** = 3**i** - 4**j** - **k** en **B** = 2**i** + 3**j** - 6**k**. Toon aan dat het parallellogram een ruit is en bepaal de lengte van de zijden en de grootte van de hoeken.
Antw. : $5\sqrt{3}/2$, arc cos 23/75, 180° - arc cos 23/75 of 4,33; 72°8'; 107°52'.

63. Bepaal de projectie van de vector 2**i** - 3**j** + 6**k** op de vector **i** + 2**j** + 2**k**. *Antw.* : 8/3.

64. Bepaal de projectie van de vector 4**i** - 3**j** + **k** op de rechte gaande door de punten (2, 3 , -1) en (-2, -4, 3).
Antw.: 1.

65. Als **A** = 4**i** - **j** + 3**k** en **B** = -2**i** + **j** - 2**k**, bepaal dan een eenheidsvector loodrecht op zowel **A** als **B**.
Antw.: ±(**i** - 2**j** - 2**k**)/3.

66. Bepaal de scherpe hoek gevormd door twee diagonalen van een kubus. *Antw.* : arc cos 1/3 of 70°32'.

67. Vind een eenheidsvector evenwijdig aan het vlak *xy* en loodrecht op de vector 4**i** - 3**j** + **k**.
Antw. : ±(3**i** + 4**j**)/5.

68. Toon aan dat **A** = (2**i** -2**j** + **k**)/3, **B** = (**i** + 2**j** + 2**k**)/3 en **C** = (2**i** + **j** - 2**k**)/3 eenheidsvectoren zijn die twee aan twee loodrecht op elkaar staan.

69. Bepaal het werk verricht door een voorwerp in beweging op een rechte vanaf het punt (3, 2, -1) tot aan het punt (2, -1,4) in een krachtenveld gegeven door **F** = 4**i** - 3**j** + 2**k**. *Antw* : 15.

78. Bereken elk van de volgende uitdrukkingen:
(*a*) 2**j** ∧ (3**i** -4**k**), (*b*) (**i** + 2**j**) ∧ **k**, (*c*) (2**i** - 4**k**) ∧ (**i** + 2**j**), (*d*) (4**i** + **j** - 2**k**) ∧ (3**i** + **k**), (*e*) (2**i** + **j** - **k**) ∧ (3**i** - 2**j** + 4**k**).
Antw.: (a) -8**i** - 6**k**, (*b*) 2**i** - **j**, (*c*) 8**i** - 4**j** + 4**k**, (*d*) **i** - 10**j** - 3**k**, (*e*) 2**i** - 11**j** - 7**k**

79. Als A = 3**i** - **j** - 2**k** en **B** = 2**i** + 3**j** + **k**, bepaal dan: (*a*)|**A** ∧ **B**|, (*b*) (**A**+2**B**) ∧(2**A** - **B**), (*c*) |(**A** + **B**) ∧ (**A** - **B**)|.
Antw. : (*a*) $\sqrt{195}$. (*b*) -25**i** + 35**j** - 55**k**, (*c*) $2\sqrt{195}$

84. Als **A** = 2**i** + **j** - 3**k** en **B** = **i** - 2**j** + **k**, vind dan een vector met lengte 5 loodrecht op zowel **A** als op **B**.
Antw. : $5(\sqrt{3})/3$(**i** + **j** + **k**).

EN NOG WAT OEFENINGEN (UIT EEN VORIGE CURSUS)

• Vind de (scherpe) hoek tussen de diagonalen van een vierhoek met als hoekpunten (0,0,0), (3,2,0), (4,6,0) en (1,3,0). *Antw.:* $\theta = 82°53'$

• Een driehoek heeft de hoekpunten A(2,1,-1), B(-1,3,2) en C(1,-2,1). Vind de lengte van de zwaartelijn tegenover de zijde AB.

• Vind de projectie van de vector **A** = **i** - 2**j** + **k** op de vector **B** = 4**i** - 4**j** + 7**k**. *Antw.:* Een eenheidsvector **e** gericht volgens **B** is $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 7^2}}$ = (4**i** - 4**j** + 7**k**)/9. De projectie van **A** op de vector **B** wordt **A**.**e** = (**i** - 2**j** + **k**)(4**i** - 4**j** + 7**k**)/9 = 19/9.

• Vind een eenheidsvector in de richting van de resultante van de vectoren **A** = 2**i** - **j** + **k**, **B** = **i** + **j** + 2**k** en **C** = 3**i** - 2**j** + 4**k**. *Antw.:* ±(6**i** - 2**j** + 7**k**)/√89.

• Bereken |(**A**+**B**)·(**A**-**B**)| als **A** = 2**i** - 3**j** + 5**k** en **B** = 3**i** + **j** - 2**k**. *Antw.:* 24.

• Bereken a zodanig dat **A** = 2**i** - 3**j** + 5**k** en **B** = 3**i** + a**j** - 2**k** orthogonaal zijn. *Antw.:* a =-4/3.

• Als **A** = 2**i** + **j** + **k**, **B** = **i** - 2**j** + 2**k** en **C** = 3**i** - 4**j** + 2**k**, vind dan de projectie van **A** + **C** in de richting van **B**. *Antw.:* 17/3.

• Een driehoek heeft hoekpunten A(2,3,1), B(-1,1,2) en C(1,-2,3). Vind de cosinus van de scherpe hoek die de zwaartelijn t. o. v. AC maakt met de zijde BC. *Antw.:* cos θ = √91/14.

• Als **A** = 3**i** - **j** + 2**k** en **A** = 2**i** + 3**j** – **k**, vind dan **A**∧**B**. *Antw.:* $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ = -5**i** + 7**j** + 11**k**.

• Vind |(2**A**+**B**)∧(**A**-2**B**)| als **A** = 2**i** – **j** + **k** en **B** = **i** + 2**j** - 3**k**. *Antw.:* 25√3.

• Vind een eenheidsvector loodrecht op de vlak van de vectoren en **A** = 3**i** - 2**j** + 4**k** en **B** = **i** + **j** - 2**k**. *Antw.:* ±(2**j**+**k**)/√5.

• Illustreer de gelijkheid: **A**∧**B** = -**B**∧**A** in een tekening met een numeriek voorbeeld.

• Toon met een voorbeeld aan dat het vectorieel product van vectoren niet noodzakelijk associatief is.