(HOOFDSTUK 1, uit "Theory and problems of Vector Analysis", door Murray, R. Spiegel, Schaum 's Series, McGraw-Hill, New York; dit is de voorbereiding voor een uit te geven Nederlandse vertaling).

Vectoren en scalairen

VECTOR. Een vector is een "wiskundige grootheid" die een grootte (modulus), een richting en een zin heeft, zoals een verplaatsing, een snelheid, een kracht of een versnelling.

Grafisch laat een vector zich voorstellen door een pijl *OP* die de richting en de zin bepaalt, terwijl de modulus van de vector gegeven wordt door de lengte van de pijl. Het punt *O* van de pijl heet de oorsprong of het beginpunt van de vector, en het punt *P* heet het einde (Fig. 1).

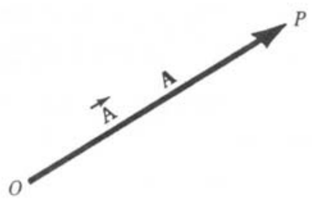


Fig. 1

Analytisch laat een vector zich voorstellen door een letter met een pijltje erboven, zoals $\vec{A}$ in de Fig. 1, terwijl zijn modulus met $|\vec{A}|$ of met A wordt aangeduid. In gedrukte werken worden vetgedrukte letters gebruikt, zoals **A**, om de vector $\vec{A}$ voor te stellen, terwijl |**A**| of A zijn modulus voorstelt. We zullen hier de notatie met vetgedrukte letters gebruiken. De vector *OP* wordt eveneens met $\overrightarrow{OP}$ of **OP** genoteerd; in dit geval is zijn modulus $\overline{OP}$, $|\overrightarrow{OP}|$ of |**OP**|.

SCALAIR. Dit is een hoeveelheid of een grootte zonder richting, bijvoorbeeld: een massa, een lengte, de tijd, de temperatuur en elk reëel getal. Scalairen worden genoteerd met letters in gewone lettertypes zoals in de elementaire algebra. De bewerkingen op de scalairen volgen dezelfde regels als deze van de elementaire algebra.

VECTORALGEBRA. De gebruikelijke bewerkingen optelling, verschil en vermenigvuldiging zoals die uit de algebra met getallen of scalairen bekend zijn, kunnen worden uitgebreid naar de algebra van vectoren, mits enige aanpassing in de definities. De volgende definities zijn fundamenteel.

1. Twee vectoren **A** en **B** zijn identiek als (en slechts als) ze dezelfde modulus, dezelfde richting en dezelfde zin hebben, zonder rekening te houden met hun oorsprong. Zo zijn **A** = **B** in Fig.2.
2. Een vector in tegenovergestelde zin als deze van de vector **A** maar met dezelfde modulus en dezelfde richting wordt met **–A** genoteerd (Fig. 3).

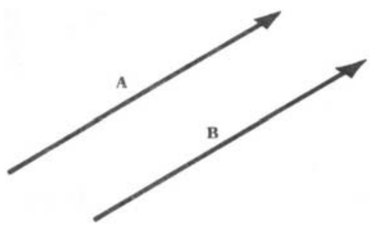


Fig. 2

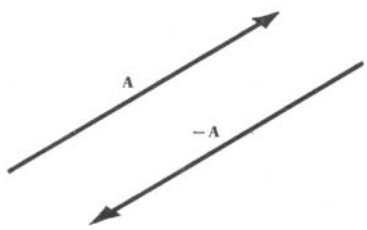


Fig. 3

3. De som of resultante van de vectoren **A** en **B** is een vector **C** verkregen door de oorsprong van **B** op het einde van **A** te plaatsen en daarna de oorsprong van **A** met het einde van **B** te verbinden (Fig. 4). Deze som schrijft zich als **A + B**, d. w. z. **C** = **A + B**.
Deze definitie is equivalent aan de "wet van het parallellogram" voor de optelling van vectoren (zie oefening 3).
De veralgemening naar een som van meer dan twee vectoren is eenvoudig (zie oefening 4).

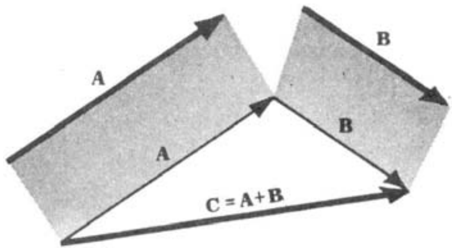


Fig. 4

4. Het verschil van de vectoren **A** en **B**, genoteerd met **A – B**, is de vector **C** die opgeteld bij de vector **B** de vector **A** geeft. Of, op equivalente wijze, laat **A – B** zich definiëren als de som **A** + (– **B**).
5. Het product van een vector **A** met een scalair *m* is een vector *m***A** met modulus |*m*| vermenigvuldigd met de modulus van **A**, met dezelfde richting als **A**, en dezelfde zin of tegengestelde zin, naargelang *m* positief of negatief is. Als *m* = 0, is *m***A** de nulvector.

EIGENSCHAPPEN VAN DE VECTORALGEBRA. Als **A, B** en **C** vectoren zijn en *m* en *n* scalairen zijn, dan is:

1.	**A + B** = **B + A**.	Commutativiteit van de optelling
2.	**A** + (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C**	Associativiteit van de optelling
3.	*m***A** = **A***m*	Commutativiteit van de vermenigvuldiging
4.	*m*(*n***A**) = (*mn*)**A**	Associativiteit van de vermenigvuldiging
5.	(*m* + *n*)**A** = *m***A** + *n***A**	Distributiviteit
6.	*m*(**A** + **B**) = *m***A** + *m***B**	Distributiviteit

Merk op dat in deze eigenschappen alleen de vermenigvuldiging van een vector met een of meer scalairen wordt gebruikt. In hoofdstuk 2 worden producten tussen vectoren gedefinieerd.

Deze eigenschappen laten ons toe om vergelijkingen met vectoren op dezelfde wijze te behandelen als deze van de gewone algebra.

EENHEIDSVECTOREN. Een eenheidsvector is een vector met modulus 1. Als **A** een vector is met modulus A ≠ 0, dan is **A**/A een eenheidsvector met dezelfde richting en zin als **A**.

Elke vector **A** laat zich voorstellen door een eenheidsvector **a** gericht volgens **A** en vermenigvuldigd met de modulus **A**; notatie: **A** = A**a.**

DE ORTHOGONALE EENHEIDSVECTOREN i, **j**, **k**. Een belangrijke verzameling van eenheidsvectoren is deze van de vectoren gericht volgens de positieve *x*-, *y*-, *z*-assen van een systeem van rechthoekige coördinaten in 3 dimensies, en genoteerd met respectievelijk **i**, **j**, en **k** (Fig. 5).

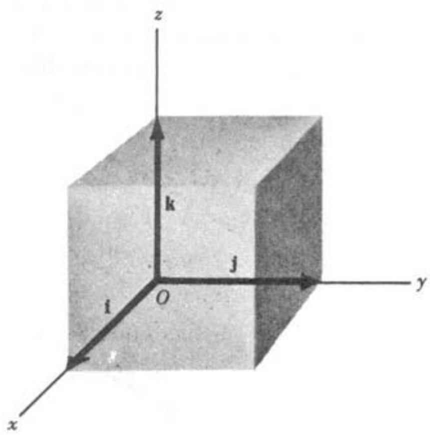


Fig. 5

Voortaan zullen we rechthoekige coördinatensystemen gebruiken die rechtshandig zijn, behalve als we het preciseren. Een dergelijk systeem dankt zijn naam aan het feit dat een draaiing van 90° die van links naar rechts Ox naar Oy draait, voortgaat volgens de positieve z-as; zoals in figuur 5.

Men zegt dat drie vectoren **A**, **B** en **C**, waarvan de oorsprongen samenvallen en die niet coplanair zijn (d. w. z. dat ze niet in een zelfde vlak liggen, noch dat ze evenwijdig zijn met een zelfde vlak), een *rechtshandig orthogonaal stelsel* vormen als een kurkentrekker die draait in de zin van **A** naar **B** vooruitgaat volgens de positieve zin van de as **C** (Fig. 6).

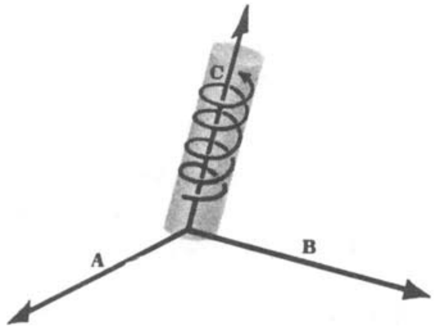


Fig. 6

COMPONENTEN VAN EEN VECTOR. In een ruimte met 3 dimensies, laat elke vector **A** zich voorstellen door zijn oorsprong *O* van een stelsel rechthoekige coördinaten (Fig. 7). Stel dat (A_1, A_2, A_3) de rechthoekige coördinaten zijn van het einde van een vector **A** waarvan het beginpunt in *O* ligt. De vectoren $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$ en $A_3\mathbf{k}$ heten dan de rechthoekige componenten of eenvoudiger de (vector-) componenten van **A** in de richting van de *x*-, *y*-, en *z*-as respectievelijk. A_1, A_2 en A_3 zijn dan de rechthoekige componenten of componenten van **A** in de richting van de *x*-, *y*-, en *z*-as respectievelijk.

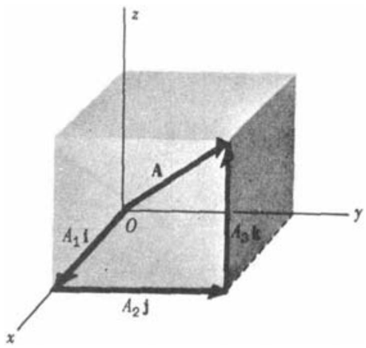


Fig. 7

De som of resultante van $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$ en $A_3\mathbf{k}$ is de vector **A** zodat er geldt:

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}.$$

De lengte van **A** is $A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$.

Een bijzondere benaming is deze van de *positievector* **r** vanuit het punt *O* naar het punt met coördinaten (x, y, z):

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

en waarvan dan de lengte is:

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

VELD VAN SCALAIREN. **[Niet kennen]** Als met elk punt (*x*, *y*, *z*) van een gebied *R* van de ruimte een getal of een scalair $\phi(x, y, z)$ overeenkomt, dan heet ϕ een scalaire positiefunctie of een scalaire functie en op deze wijze definiëren we een veld van scalairen ϕ in *R*.

Voorbeelden. *(1)* De temperatuur, op een gegeven ogenblik, op elk punt van de aarde, op haar oppervlak of binnenin, definieert een veld van scalairen.

(2) $\phi(x, y, z) = x^3y - z^2$ definieert een veld van scalairen.

Een veld van scalairen dat onafhankelijk is van de tijd heet een vast of stationair veld van scalairen.

VELD VAN VECTOREN. **[Niet kennen]** Als met elk punt (*x*, *y*, *z*) van een gebied *R* van de ruimte een vector $\mathbf{V}(x, y, z)$ overeenkomt, dan **V** een vectoriële positiefunctie of een vectorfunctie en op deze wijze definiëren we een vectorveld **V** in *R*.

Voorbeelden. *(1)* De snelheid in elk punt (*x*, *y*, *z*) van een vloeistof in een continue beweging op elk ogenblik. Dit geeft een vectorveld.

(2) $\mathbf{V}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} - 2yz^3\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$ definieert een veld van vectoren.

Een veld van vectoren dat onafhankelijk is van de tijd heet een vast of stationair vectorveld.

OPGELOSTE OEFENINGEN

1. Bepaal welke tussen de volgende gegevens vectoren zijn of scalairen.

(a) het gewicht	(d) de hoeveelheid beweging	(g) het volume	(j) het magnetisch veld
(b) de calorie	(e) de dichtheid	(h) de afstand	
(c) De warmtehoeveelheid	(f) de energie	(i) de snelheid	

Antw.:

(a) vector	(d) vector	(g) scalair	(j) vector
(b) scalair	(e) scalair	(h) scalair	
(c) scalair	(f) scalair	(i) scalair	

2. Bepaal grafisch (*a*) een kracht van 10N in de richting 30° oost-noord
(*b*) een kracht van 15N in de richting 30° noordoost

Antw.:

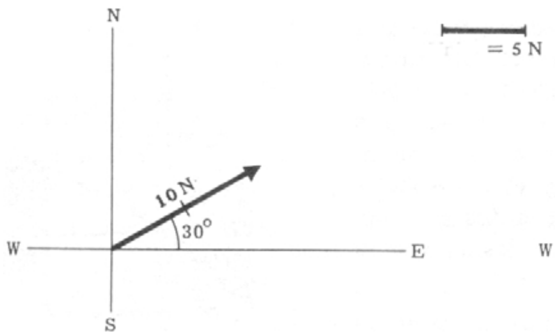


Fig. (*a*)

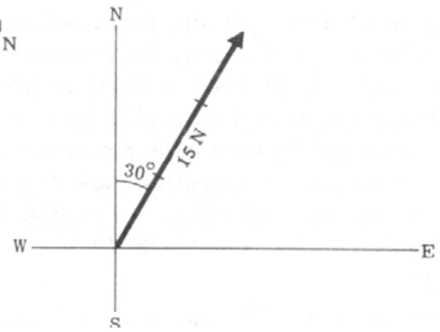


Fig. (*b*)

Door de lengte-eenheid te kiezen zoals aangegeven, worden de vectoren voorgesteld als in de gegeven schema's.

3. Een auto rijdt 3km naar het noorden, daarna 5km naar het noordoosten. Stel deze verplaatsingen grafisch voor, en bepaal de resultante (*a*) grafisch, (b) analytisch

Antw.:

De vector **OP** of **A** stelt de verplaatsing voor van 3km naar het noorden.

De vector **PQ** of **B** stelt de verplaatsing voor van 5km naar het noordoosten.

De vector **OQ** of **C** stelt de resulterende verplaatsing voor of de som van de vectoren **A** en **B**, d. w. z. **C** = **A + B**. Dit is de "regel van de driehoeken" voor de optelling van vectoren.(zie Fig. *c*)

De resultante **OQ** kan ook worden verkregen als diagonaal van het parallellogram *OPQR* waarvan de zijden de vector **OP** = **A** en **OR** zijn (gelijk aan de vector **PQ** of **B**). Dit is de "regel van het parallellogram" voor de optelling van vectoren (het "krachtenparallellogram").

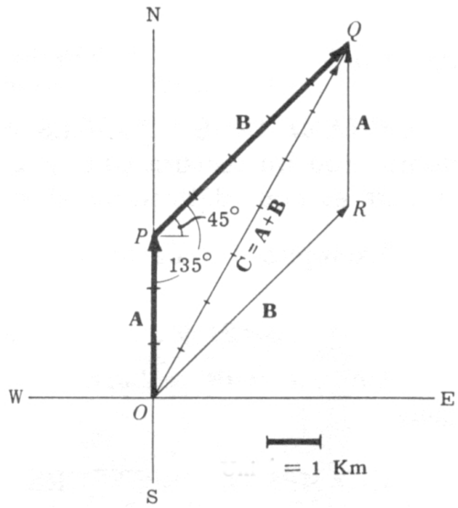


Fig. (*c*)

(a) Grafische bepaling van de resultante. Breng de eenheid van 1km over op de vector **OQ** om zijn lengte van 7,4km te bepalen (bij benadering). Gebruik een geodriehoek om de hoek *EOQ* = 61,5° te vinden. Dus heeft de vector **OQ** een lengte van 7,4km en een richting van 61,5° noordoost.

(b) Analytische bepaling van de resultante. Als de lengtes van de vectoren **A**, **B** en **C** door A, B en C worden genoteerd, dan geldt in de driehoek *OPQ*:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos O\hat{P}Q = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\cos 135° = 34 + 15\sqrt{2} = 55{,}21$$

en *C* = 7,43 (bij benadering).

Door de sinusregel geldt: $\dfrac{A}{\sin O\hat{Q}P} = \dfrac{C}{\sin O\hat{P}Q}$.

Dus is $\sin O\hat{Q}P = \dfrac{A \sin O\hat{P}Q}{C} = \dfrac{3(0{,}707)}{7{,}43} = 0{,}2855$ en $O\hat{Q}P = 16°35'$.

Bijgevolg heeft de **OQ** een lengte van 7,43 km (bij benadering) en een richting van (45° + 16°35') = 61°35' noordoost (bij benadering).

4. Bepaal de som (of de resultante) van de volgende verplaatsingen:
A, 10m noordwest; **B**, 20m 30° oost-noord; **C**, 35m naar het zuiden; zie fig. (a) hieronder.

Antw.:

Plaats de oorsprong van **B** aan het einde van **A**.
Plaats de oorsprong van **C** aan het einde van **B**.
De resultante **D** wordt verkregen door de oorsprong van **A** met het einde van **C** te verbinden, d. w. z. **D** = **A** + **B** + **C**.
Grafisch heeft de resultante als lengte 4,1 eenheden = 20,5m en als richting 60° zuidoost. Voor een analytische behandeling van de optelling van 3 of meer vectoren, in het vlak of in de ruimte, zie oefening 26.

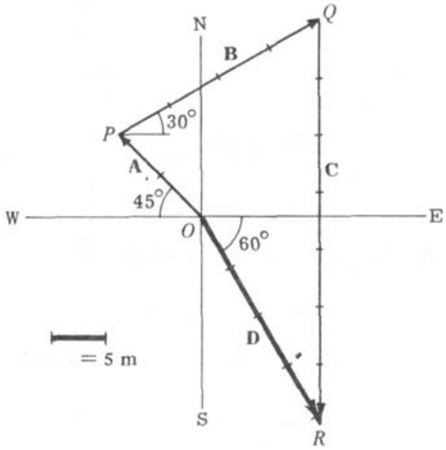


Fig. (*a*)

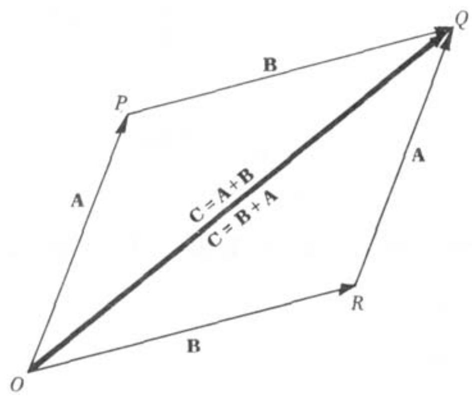


Fig. (*b*)

5. Aantonen dat de optelling van vectoren commutatief is, d.w.z. **A** + **B** = **B** + **A**. Zie Fig. *(b)* hierboven.

Antw.:

OP + **PQ** = **OQ** of **A** + **B** = **C**,
OR + **RQ** = **OQ** of **B** + **A** = **C**.

Dus **A** + **B** = **B** + **A**.

6. Aantonen dat de optelling van vectoren associatief is, d. w. z. **A** + (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C**. Zie Fig. *(c).*

Antw.:

OP + **PQ** = **OQ** = (**A** + **B**),
en **PQ** + **QR** = **PR** = (**B** + **C**).

OP + **PR** = **OR** = **D**, i. e. **A** + (**B** + **C**) = **D**.

OQ + **QR** = **OR** = **D**, i. e. (**A** + **B**) + **C** = **D**.

Dus **A** + (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C**.

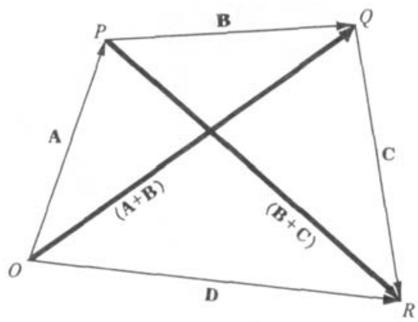


Fig. (*c*)

De veralgemening van de resultaten van de oefeningen 5 en 6 toont aan dat de volgorde van de optelling van een willekeurig aantal vectoren van geen belang is.

7. Stel dat $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, ..., $\mathbf{F_6}$ krachten zijn uitgeoefend op een voorwerp *P*, zoals aangegeven in de figuur 0 (*a*). Wat is de kracht die belet dat *P* zich verplaatst?

Antw.:

Vermits de volgorde van de vectoren van geen belang is, kunnen we beginnen met gelijk welke vector, $\mathbf{F_l}$ bijvoorbeeld. Bij $\mathbf{F_l}$ voegen we $\mathbf{F_2}$ dan $\mathbf{F_3}$ enz. De vector die de oorsprong van $\mathbf{F_l}$ verbindt met het einde van $\mathbf{F_6}$ is de resultante **R**, d.w.z. $\mathbf{R} = \mathbf{F_l} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3} + \mathbf{F_4} + \mathbf{F_5} + \mathbf{F_6}$. Zie fig. 0*(b).*

De kracht nodig om een verplaatsing van *P* te verhinderen **-R**, een vector van dezelfde grootte en richting als **R** maar in tegenovergestelde zin; hij wordt soms de evenwichtskracht genoemd.

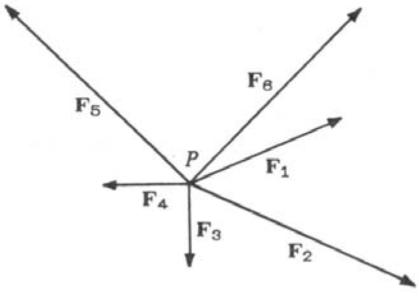


Fig. 0 (*a*)

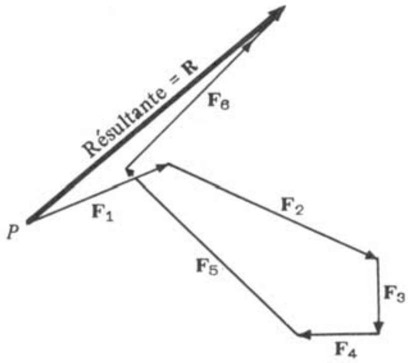


Fig 0 (*b*)

8. Beschouw de gegeven vectoren **A**, **B** en **C** (Fig. la), construeer dan
   (a) **A** - **B**+2**C** *(b)* 3**C** –½(2**A** - **B**).

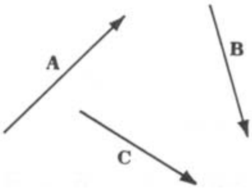


Fig. 1 (*a*)

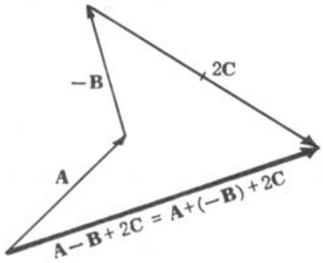


Fig. 2 (*a*)

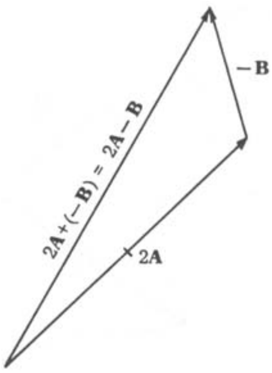


Fig. 1 (*b*)

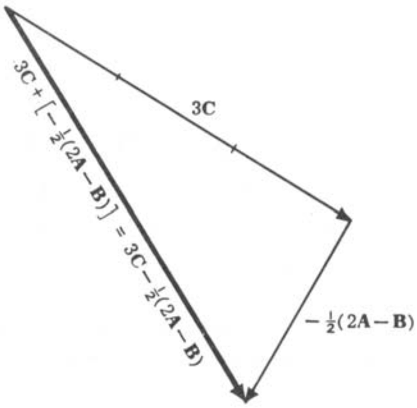


Fig. 2 (*b*)

9. Een vliegtuig richt zich naar het noordwesten aan een snelheid van 125 mi/u met betrekking tot de grond, te wijten aan een westenwind van 50 mi/u, ook in vergelijking met de grond. Wat is de snelheid en in welke richting zou het vliegtuig zich richten indien er geen wind zou zijn?

Antw.:

Zij $\mathbf{W}$ = snelheid van de wind
$\mathbf{V}_a$= snelheid van het vliegtuig, met inbegrip van de wind.
$\mathbf{V}_b$= snelheid van het vliegtuig, zonder wind.

Dus is $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_b + \mathbf{W}$ of $\mathbf{V}_b = \mathbf{V}_a - \mathbf{W} = \mathbf{V}_a + (-\mathbf{W})$.

$\mathbf{V}_b$ heeft als lengte 6,5 eenheden of 164,2 mi/u en de richting is *32,5662°* noordwest.

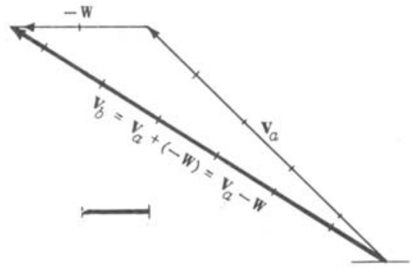


Fig.

10. Gegeven twee niet-colineaire vectoren **a** en **b**, bepaal de uitdrukking van een willekeurige vector **r** liggend in het vlak bepaald door **a** en **b**.

Antw.:

Niet-colineaire vectoren zijn vectoren die niet evenwijdig zijn aan een zelfde rechte. Dus, indien hun oorsprongen samenvallen, bepalen ze een vlak. Zij dus **r** een vector in het vlak van **a** en **b** en waarvan de oorsprong samenvalt met de oorsprongen van **a** en **b** in *O*. Breng vanuit het einde *R* van **r** de evenwijdigen aan aan de vectoren **a** en **b** en vervolledig het parallellogram *ODRC* door eventueel de dragers van de vectoren **a** en **b** te verlengen (de dragers zijn de rechten waarop de vectoren liggen).

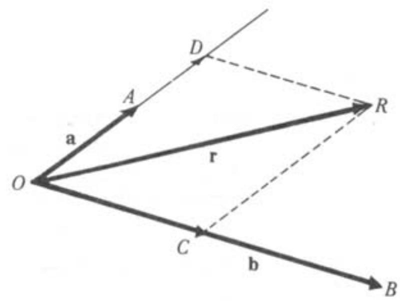


Fig.

Volgens de figuur, is

$\mathbf{OD} = x\,(\mathbf{OA}) = x\mathbf{a}$, waar x een scalair is,

$\mathbf{OC} = y\,(\mathbf{OB}) = y\mathbf{b}$, waar y een scalair is.

Maar volgens de regel van het parallellogram is:

$\mathbf{OR} = \mathbf{OD} + \mathbf{OC}$ of $\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$

de gevraagde uitdrukking. De vectoren $x\mathbf{a}$ en $y\mathbf{b}$ heten de vectorcomponenten van **r** in de richtingen van **a** en **b** respectievelijk. De scalairen x en y kunnen positief of negatief zijn volgends de relatieve oriëntaties van de vectoren. Volgens de constructieprocedure is het vanzelfsprekend dat x en y uniek zijn voor gegeven **a**, **b** en **r**. De vectoren **a** en **b** heten basisvectoren voor het vlak.

11. Gegeven drie non-coplanaire vectoren **a**, **b** en **c**, bepaal de uitdrukking voor elke vector **r** in de driedimensionale ruimte.

Antw.:

De niet-coplanaire vectoren zijn vectoren die niet evenwijdig zijn met een zelfde vlak. Dus indien hun oorsprongen samenvallen, bevinden ze zich niet in een zelfde vlak.

Zij **r** een vector in de ruimte waarvan de oorsprong samenvalt met de oorsprongen van **a**, **b** en **c** in *O*. Door het einde van **r** gaan vlakken evenwijdig met respectievelijk de vlakken bepaald door **a** en **b**, **b** en **c**, en **a** en **c**. Vervolledig het parallélépipedum *PQRSTUV* door de dragers van **a**, **b** en **c** indien nodig te verlengen. Volgens de figuur is dan:

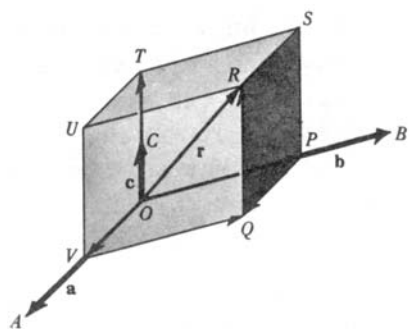


Fig.

$\mathbf{OV} = x(\mathbf{OA}) = x\mathbf{a}$ waar x een scalair is

$\mathbf{OP} = y\,(\mathbf{OB}) = y\mathbf{b}$ waar y een scalaire is

$\mathbf{OT} = z\,(\mathbf{OC}) = z\mathbf{c}$ waar z een scalair is.

Maar $\mathbf{OR} = \mathbf{OV} + \mathbf{VQ} + \mathbf{QR} = \mathbf{OV} + \mathbf{OP} + \mathbf{OT}$ of $\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$.

Door de constructiemethode, is het vanzelfsprekend dat x, y en z uniek zijn voor gegeven **a**, **b**, **c** en **r**.

De vectoren x**a**, y**b**, z**c** heten vectorcomponenten van **r** in de richtingen van **a**, **b** en **c** respectievelijk. De vectoren **a**, **b** en **c** heten basisvectoren in dimensie 3.

In het bijzonder, als **a**, **b** en **c** eenheidsvectoren zijn die 2 aan 2 loodrecht staan op elkaar, noteren we die met **i**, **j** en **k**. We stellen dan vast dat elke vector **r** op een unieke wijze kan uitgedrukt worden door **i**, **j**, en **k** door middel van

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$

Merk ook op dat indien **c** = **o**, dan **r** in het vlak van **a** en **b** moet liggen zodat het resultaat van oefening 10 wordt teruggevonden.

12. Aantonen dat indien **a** en **b** niet colineair zijn, dan $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{o}$ impliceert dat $x = y = 0$.

Antw.:

Veronderstel dat $x \neq 0$. Dan impliceert $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{o}$ dat $x\mathbf{a} = -y\mathbf{b}$ of $\mathbf{a} = -(y/x)\mathbf{b}$, d. w. z. dat **a** en **b** evenwijdig moeten zijn met eenzelfde rechte en dus colineair, wat de veronderstelling tegenspreekt. Dus is $x = 0$; maar dan is $y\mathbf{b} = 0$; en dus $y = 0$.

13. Als $x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}$, waarbij **a** en **b** niet colineair zijn, dan is $x_1 = x_2$ en $y_1 = y_2$.

Antw.:

$x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}$ laat zich schrijven als

$x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} - (x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}) = \mathbf{o}$ of $(x_1 - x_2)\mathbf{a} + (y_1 - y_2)\mathbf{b} = \mathbf{o}$.

Volgens oefening 12 is dan $x_1 - x_2 = 0$, $y_1 - y_2 = 0$ of $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

14. Toon aan dat als **a**, **b** en **c** niet coplanair zijn, dan $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{o}$ impliceert dat $x = y = z = 0$.

Antw.:

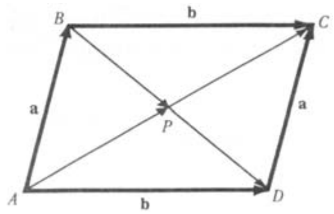
Veronderstel dat $x \neq 0$. Dan impliceert $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{o}$ dat $x\mathbf{a} = -y\mathbf{b} - z\mathbf{c}$ of $\mathbf{a} = -(y/x)\mathbf{b} -(z/x)\mathbf{c}$. Maar $-(y/x)\mathbf{b} -(z/x)\mathbf{c}$ is een vector in het vlak bepaald door **b** en **c** (oefening 10), d. w. z. **a** is in het vlak van **b** en **c** wat evident in tegenstelling is met de hypothese dat **a**, **b** en **c** niet coplanair zijn. Als x = 0 wordt door een analoge redenering een tegenstelling verkregen door te veronderstellen dat y ≠ 0 en z ≠ 0.

15. Als $x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} + z_1\mathbf{c} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b} + z_2\mathbf{c}$, waarbij **a**, **b** en **c** niet coplanair zijn, dan is $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ en $z_1 = z_2$.

Antw.:

De vergelijking laat zich schrijven als $(x_1 - x_2)\mathbf{a} + (y_1 - y_2)\mathbf{b} + (z_1 - z_2)\mathbf{c} = \mathbf{o}$. Dan geldt volgens oefening 14, $x_1 - x_2 = 0$, $y_1 - y_2 = 0$, $z_1 - z_2 = 0$ of $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

16. Toon aan dat de diagonalen van een parallellogram zich snijden in hun midden.



Antw.:

Zij *ABCD* het gegeven parallellogram en *P* de doorsnede van de diagonalen.

Omdat **BD** + **a** = **b**, **BD** = **b** - **a**. Dan is **BP** = x(**b** - **a**).

Omdat **AC** = **a** + **b**, **AP** = y(**a** + **b**).

Maar **AB** = **AP** + **PB** = **AP** - **BP**.

d. w. z. $\mathbf{a} = y(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - x(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (x + y)\mathbf{a} + (y - x)\mathbf{b}$.

Omdat **a** en **b** niet colineair zijn, volgt er volgens oefening 13 dat $x + y = 1$ en $y - x = 0$, d. w. z. $x = y = ½$ en *P* is het midden van de diagonalen.

17. Als de middens van de opeenvolgende zijden van een willekeurige vierhoek verbonden worden door rechten, toon dan aan dat de verkregen vierhoek een parallellogram is.

Antw.:

Zij *ABCD* de gegeven vierhoek en *P*, *Q*, *R*, *S* de middens van de zijden. Zie figuur Fig. (a) van de volgende bladzijde.

Dan is **PQ** = ½(**a** + **b**), **QR** = ½(**b** + **c**), **RS** = ½(**c** + **d**), **SP** = ½(**d** + **a**).

Maar **a** + **b** + **c** + **d** = **o**. Dan

PQ = ½(**a** + **b**) = ½(**c** + **d**) = **SR** en **QR** = ½(**b** + **c**) = ½(**d** + **a**) = **PS**

Dus zijn de tegenovergestelde zijden gelijk en evenwijdig en is *PQRS* een parallellogram. [Fig. (*a*)].

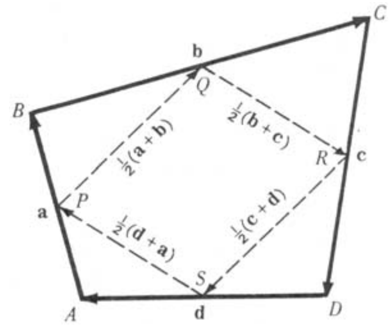


Fig. (*a*)

18. Zij P_1, P_2, P_3 vaste punten, gegeven ten opzichte van een oorsprong *O* en zij $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ hun positievectoren vanuit *O*. Toon aan dat als de vectorvergelijking $a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2 + a_3\mathbf{r}_3 = \mathbf{o}$ geldt tegenover de oorsprong *O* deze dan ook geldt tegenover gelijk welke oorsprong *O'* dan en slechts dan als $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

Antw.:

Zij $\mathbf{r}_1'$, $\mathbf{r}_2'$, $\mathbf{r}_3'$ de positievectoren van P_1, P_2, P_3 tegenover *O'* en zij $\mathbf{v}$ de positievector van *O'* tegenover *O*. We zoeken de voorwaarden waaronder de vergelijking $a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2 + a_3\mathbf{r}_3 = \mathbf{o}$ geldig blijft tegenover het nieuwe referentiestelsel.

Volgens de tegenoverstaande figuur Fig. (*b*) is het duidelijk dat

$\mathbf{r}_1 = \mathbf{v} + \mathbf{r}_1'$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{v} + \mathbf{r}_2'$, $\mathbf{r}_3 = \mathbf{v} + \mathbf{r}_3'$, en dus $a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2 + a_3\mathbf{r}_3 = \mathbf{o}$

wordt

$$\begin{aligned} a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2 + a_3\mathbf{r}_3 &= a_1(\mathbf{v} + \mathbf{r}_1') + a_2(\mathbf{v} + \mathbf{r}_2') + a_3(\mathbf{v} + \mathbf{r}_3') \\ &= (a_1 + a_2 + a_3)\mathbf{v} + a_1\mathbf{r}_1' + a_2\mathbf{r}_2' + a_3\mathbf{r}_3' = \mathbf{o} \end{aligned}$$

Het resultaat $a_1\mathbf{r}_1' + a_2\mathbf{r}_2' + a_3\mathbf{r}_3' = \mathbf{o}$ is dus geldig als en slechts als

$(a_1 + a_2 + a_3)\mathbf{v} = \mathbf{o}$ of nog: $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

Dit resultaat kan worden veralgemeend.

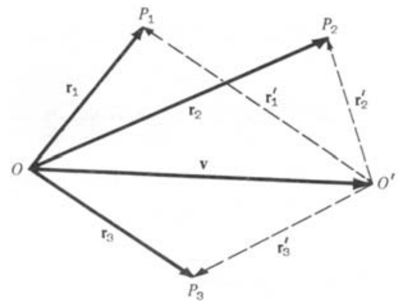


Fig. (*b*)

19. Bepaal de vergelijking van een rechte door twee gegeven punten *A* en *B* waarvan de positievectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ zijn, tegenover een oorsprong *O*.

Antw.:

Zij $\mathbf{r}$ de positievector van een willekeurig punt *P* op de rechte door *A* en *B*.

Volgens de tegenoverstaande figuur (c):

	$\mathbf{OA} + \mathbf{AP} = \mathbf{OP}$	of	$\mathbf{a} + \mathbf{AP} = \mathbf{r}$,	d. w. z. $\mathbf{AP} = \mathbf{r} - \mathbf{a}$
en	$\mathbf{OA} + \mathbf{AB} = \mathbf{OB}$	of	$\mathbf{a} + \mathbf{AB} = \mathbf{b}$,	d. w. z. $\mathbf{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Omdat $\mathbf{AP}$ en $\mathbf{AB}$ colineair zijn, is $\mathbf{AP} = t\mathbf{AB}$ of $\mathbf{r} - \mathbf{a} = t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

Dan is de gevraagde vergelijking

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \text{ of } \mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

Als de vergelijking schrijft als $(1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} - \mathbf{r} = 0$, is de som van de coëfficiënten van $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{r}$ gelijk aan $1 - t + t - 1 = 0$. Bijgevolg, volgens oefening 18, bevindt het punt *P* zich steeds op de rechte door *A* en *B* en het hangt niet af van de keuze van de oorsprong *O*, wat evident is.

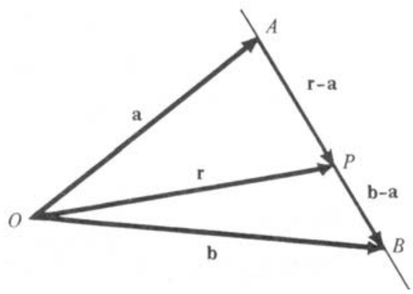


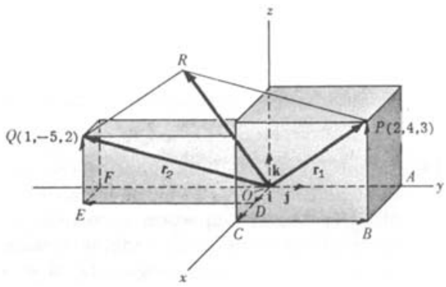
Fig. (*c*)

Andere methode: Omdat $\mathbf{AP}$ en $\mathbf{PB}$ colineair zijn, bestaan er scalairen *m en n*:

$$m\mathbf{AP} = n\mathbf{PB} \text{ of } m(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = n(\mathbf{b} - \mathbf{r}).$$

En dus is $\mathbf{r} = \dfrac{m\mathbf{a} + n\mathbf{b}}{m + n}$ en dit wordt *de symmetrische vorm* genoemd.

20. *(a)* Zoek de positievectoren van $\mathbf{r}_1$ en $\mathbf{r}_2$ van de punten $P(2, 4, 3)$ en $Q(1, -5, 2)$ in een systeem van rechthoekige coördinaten, in functie van de eenheidsvectoren $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.
(*b*) Bepaal grafisch en analytisch de resultante van de positievectoren.



Antw.:

(a) $\mathbf{r}_1 = \mathbf{OP} = \mathbf{OC} + \mathbf{CB} + \mathbf{BP} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$\mathbf{r}_2 = \mathbf{OQ} = \mathbf{OD} + \mathbf{DE} + \mathbf{EQ} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

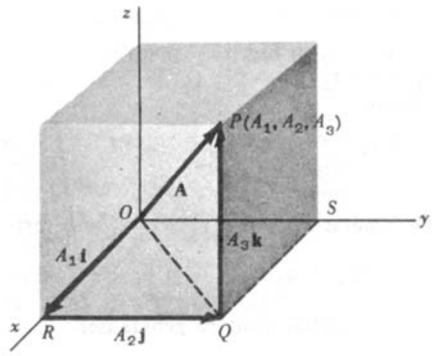
(b) Grafisch. De resultante van $\mathbf{r}_1$ en $\mathbf{r}_1$ wordt bekomen door de diagonale **OR** te nemen van het parallellogram *OPRQ*.

Analytisch, volgt de resultante uit:

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + (\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

21. Bewijzen dat de modulus A van de vector

$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{i} + A_3\mathbf{i}$ gelijk is aan $\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$.



Antw.:

Volgens de stelling van Pythagoras, is

$$(|\mathbf{OP}|)^2 = (|\mathbf{OQ}|)^2 + (|\mathbf{QP}|)^2$$

waarbij $|\mathbf{OP}|$ de modulus voorstelt van de vector **OP**, enz... Analoog is: $(|\mathbf{OQ}|)^2 = (|\mathbf{OR}|)^2 + (|\mathbf{RQ}|)^2$

Dus is $(|\mathbf{OP}|)^2 = (|\mathbf{OR}|)^2 + (|\mathbf{RQ}|)^2 + (|\mathbf{QP}|)^2$

of

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

22. Gegeven $\mathbf{r}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, bepaal de grootte van de vectoren:
(*a*) $\mathbf{r}_3$, (*b*) $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$, $\cdot$ (*c*) $2\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 - 5\mathbf{r}_3$

Antw.:

(*a*) $|\mathbf{r}_3| = |-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = 3.$

(*b*) $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + (2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}.$

Dan is dus $|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3| = |4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k}| = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (0)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$

(*c*) $2\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 - 5\mathbf{r}_3 = 2(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) - 3(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) - 5(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$
$= 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k} - 6\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 9\mathbf{k} + 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 10\mathbf{k} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$

Dan is $|2\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 - 5\mathbf{r}_3| = |5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{30}$.

23. Als $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, en $\mathbf{r}_4 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, bepaal de scalairen a, b, c zodanig dat $\mathbf{r}_4 = a\mathbf{r}_1 + b\mathbf{r}_2 + c\mathbf{r}_3$.

Antw.:

Er moet gelden dat $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} = a(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + b(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) + c(-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})$
$= (2a + b - 2c)\mathbf{i} + (-a + 3b + c)\mathbf{j} + (a - 2b - 3c)\mathbf{k}.$

Omdat $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, en $\mathbf{k}$ niet coplanair zijn, komt er volgens oefening 15,

$$2a + b - 2c = 3, \quad -a + 3b + c = 2, \quad a - 2b - 3c = 5.$$

En dus is $a = -2$, $b = 1$, $c = -3$ en $\mathbf{r}_4 = -2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - 3\,\mathbf{r}_3$.

De vector $\mathbf{r}_4$ wordt daarom lineair afhankelijk van $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ en $\mathbf{r}_3$ genoemd; met andere woorden, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ en $\mathbf{r}_4$ vormen een verzameling van lineair afhankelijke vectoren. Daarentegen zijn drie (of minder) van deze vectoren wel lineair onafhankelijk.

In het algemeen wordt van de vectoren **A**, **B**, **C**, ... lineair afhankelijk genoemd als we een verzameling scalairen a, b, c, ... kunnen vinden, die niet allen nul zijn, zodanig dat $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} + ... = \mathbf{o}$, zoniet heten ze lineair onafhankelijk.

24. Bepaal een eenheidsvector evenwijdig aan de som van de vectoren $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, en $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Antw.:

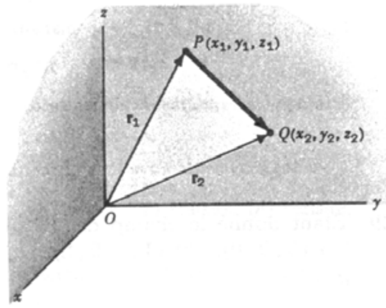
Resultante $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) + (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

$R = |\mathbf{R}| = |3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = 7$.

Een eenheidsvector evenwijdig met **R** is dan $\frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{7} = \frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{6}{7}\mathbf{j} - \frac{2}{7}\mathbf{k}$.

Ga na dat $\left|\frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{6}{7}\mathbf{j} - \frac{2}{7}\mathbf{k}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{-2}{7}\right)^2} = 1$.

25. Bepaal de vector met oorsprong $P(x_1, y_1, z_1)$ en einde $Q(x_2, y_2, z_2)$, en bepaal zijn lengte.



Antw.:

De positievector van P is $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$.
De positievector van Q is $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$.
$\mathbf{r}_1 + \mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2$ of

$$\mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})$$
$$= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$$

De lengte is $PQ = |\mathbf{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Opmerking: het is de afstand tussen de punten P en Q.

26. Zij **A**, **B** en **C** de krachten uitgeoefend op een voorwerp en gegeven in fonctie van hun componenten door de vectorvergelijkingen $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$. Bepaal de lengte van de resultante van de krachten.

Antw.:

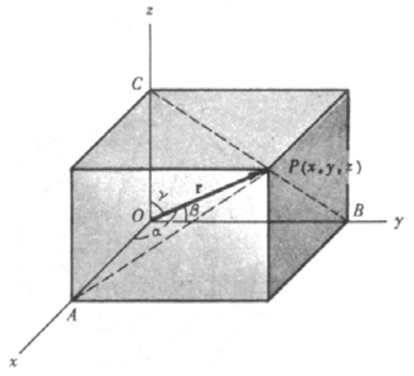
De resulterende kracht is $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = (A_1 + B_1 + C_1)\mathbf{i} + (A_2 + B_2 + C_2)\mathbf{j} + (A_3 + B_3 + C_3)\mathbf{k}$.

De lengte van de resultante is $R = \sqrt{(A_1 + B_1 + C_1)^2 + (A_2 + B_2 + C_2)^2 + (A_3 + B_3 + C_3)^2}$.

Het resultaat laat zich gemakkelijk uitbreiden tot meer dan 3 krachten.

27. De hoeken α, β, en γ bepalen die de vector $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ maakt met de positieve richtingen van de coördinaatassen en aantonen dat

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$



Antw.:

We verwijzen naar de figuur waar de OAP een rechthoekige driehoek met rechte hoek in A is; dan is $\cos\alpha = \frac{x}{|\mathbf{r}|}$. Op dezelfde wijze zijn de rechthoekige driehoeken OBP en OCP, $\cos\beta = \frac{y}{|\mathbf{r}|}$ en $\cos\gamma = \frac{z}{|\mathbf{r}|}$.

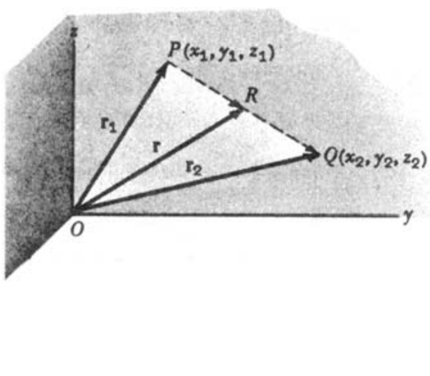
En $|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Dan is $\cos\alpha = \frac{x}{|\mathbf{r}|}$, $\cos\beta = \frac{y}{|\mathbf{r}|}$, $\cos\gamma = \frac{z}{|\mathbf{r}|}$, waaruit α, β, γ volgen.

De getallen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ heten de richtingscosinussen van de vector **OP**.

28. De vergelijkingen bepalen van de rechte door de punten $P(x_1, y_1, z_1)$ en $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Antw.:



Stel dat $\mathbf{r}_1$ en $\mathbf{r}_2$ de positievectoren zijn van P en Q respectievelijk, en stel dat $\mathbf{r}$ de positievector is van een willekeurig punt R van de rechte door P en Q.

$\mathbf{r}_1 + \mathbf{PR} = \mathbf{r}$ of $\mathbf{PR} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$

$\mathbf{r}_1 + \mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2$ of $\mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

Maar $\mathbf{PR} = t\,\mathbf{PQ}$ waarbij t een scalair is. Dus is $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = t\,(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ de gezochte vectorvergelijking van de rechte (vergelijk met oefening 19).

In rechthoekige coördinaten hebben we dan, omdat $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) = t\,[(x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})]$$

of

$$(x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j} + (z - z_1)\mathbf{k} = t\,[(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}]$$

Omdat **i**, **j**, **k** niet coplanair zijn, volgt uit oefening 15 dat

$$x - x_1 = t\,(x_2 - x_1), \qquad y - y_1 = t\,(y_2 - y_1), \qquad z - z_1 = t\,(z_2 - z_1)$$

de parametervergelijkingen zijn van de rechte, waarin t de parameter is. Door eliminatie van t, worden de vergelijkingen

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

29. **[Niet kennen]** Gegeven het veld van scalairen gedefinieerd door $\phi(x, y, z) = 3x^2z - xy^3 + 5$, bepaal ϕ in de punten (*a*) (0, 0, 0), (*b*) (1, -2, 2), (*c*) (-1, -2, -3).

Antw.:

(*a*) $\phi(0, 0, 0) = 3(0)^2 0 - 0(0)^3 + 5 = 0 + 0 + 5 = 5$

(*b*) $\phi(1, -2, 2) = 3(1)^2 2 - (1)(-2)^3 + 5 = 6 + 8 + 5 = 19$

(*c*) $\phi(-1, -2, -3) = 3(-1)^2(-3) - (-1)(-2)^3 + 5 = -9 - 8 + 5 = -12$

30. **[Niet kennen]** Stel grafische de volgende vectorvelden voor (*a*) $\mathbf{V}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, (b) $\mathrm{V}(x.\mathrm{r}) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$, (c) $\mathrm{V}(x,\mathrm{r}.z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Antw.:

(*a*) In elk punt (x, y), verschillend van (0,0), van het xy-vlak definieert zich een unieke vector $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ met grootte $\sqrt{x^2 + y^2}$, en zich verwijderend vanuit 0. Om de constructie van de grafiek te vereenvoudigen, merken we op dat de alle vectoren geassocieerd met de punten op de cirkels $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, als grootte a hebben. Dus kan het veld voorgesteld worden als in Fig. (*a*) door gebruik te maken van een aangepaste schaal.

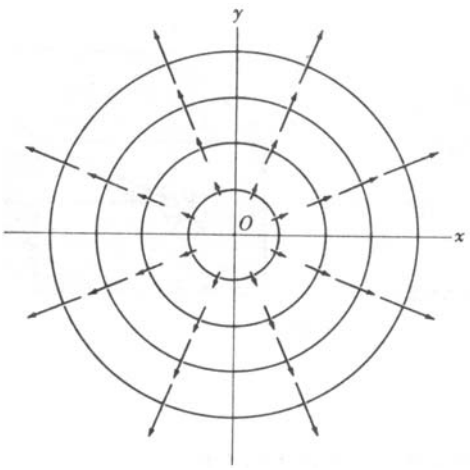


Fig. (*a*)

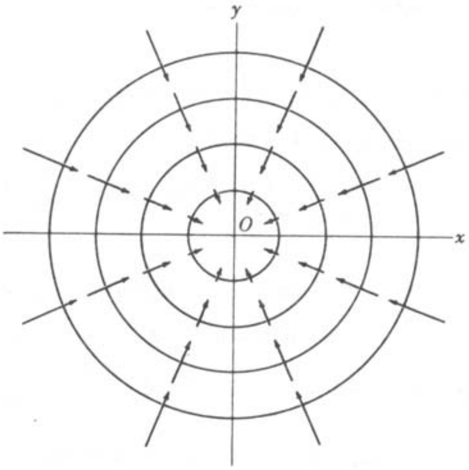


Fig. (*b*)

(*b*) Hier heeft elke vector dezelfde lengte, dezelfde richting en een tegengestelde zin als de overeenkomstige in (*a*). Dus laat het vectorveld zich voorstellen zoals in Fig. (*b*).

In de Fig. (*a*) is het alsof het veld een vloeistof is die uit de puntbron 0 komt en in de aangegeven zin vloeit. Om deze reden heet het veld "een veld met een enkele bron", en dat is de oorsprong 0.

In de Fig. (*b*) is het alsof het veld naar 0 toevloeit en het veld heet dan "een convergent veld", waarvan 0 het punt van convergentie is.

In drie dimensies, is de overeenkomstige interpretatie deze van een vloeistof die op radiale wijze uit een bronrechte komt, zoals water uit een tuinslang met veel gaatjes (of convergeert op radiale wijze naar een alles opslorpende rechte).

In deze oefening is het vectorveld van dimensie twee omdat het onafhankelijk is van z.

(c) Omdat de lengte van elke vector gelijk is aan $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, hebben alle punten op de sfeer $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, positievectoren van lengte a. Dus heeft het veld de vorm van een vloeistof die uit een bron 0 komt en zich naar alle richtingen van de ruimte uitspreidt. Het is een “veld met een unieke bron " in drie dimensies.

SUPPLEMENTAIRE OEFENINGEN

31. Overleg welke van de volgende gegevens vectoren zijn en welke scalairen ? (*a*) Kinetische energie, (*b*) Elektrisch veld, (*c*) Entropie, (*d*) Werk, (*e*) Centrifugaalkracht, (*f*) Temperatuur, (*g*) Zwaartekrachtpotentiaal, (*h*) Elektrische lading, (*i*) Drukspanning, (*j*) Frequentie
Antw.: (*a*) scalair, (*b*) vector, (*c*) scalair, (*d*) scalair, (*e*) vector, (*f*) scalair, (*g*) scalair, (*h*) scalair, (*i*) vector, (*j*) scalair.

32. Een vliegtuig legt 200 km af in westelijke richting en dan 150 km in de richting 60° noordwest. Bepaal de totale verplaatsing (*a*) Grafisch, (*b*) Analytisch.
Antw.: Afstand 304,1 km (50√37, richting en zin 25°17' nordoost (arc sin (3√111/74))

33. Bepaal grafisch de resultante van de volgende verplaatsingen: A, 20 km en 30° zuidoost; B, 50 km west ; C, 40 km noordoost; D, 30 km 60° zuidwest.

34. Toon grafisch aan dat -(**A** - **B**) = -**A** + **B**.

35. Een voorwerp *P* wordt onderworpen aan drie coplanaire krachten zoals aangegeven in de figuur (*a*) hieronder. Bepaal de kracht die nodig is om een verplaatsing van *P* te vermijden.
Antw.: 323 N tegengesteld aan de kracht van 150 N.

36. Gegeven de vectoren **A**, **B**, **C** en **D**. (Fig. (*b*) hieronder). Construeer (*a*) 3**A** - 2**B** - (**C** - **D**) (*b*) ½**C** + 2/3(**A** – **B** + 2**D**).

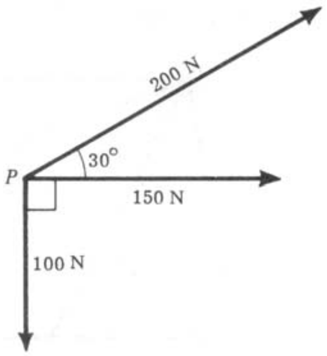


Fig. (*a*)

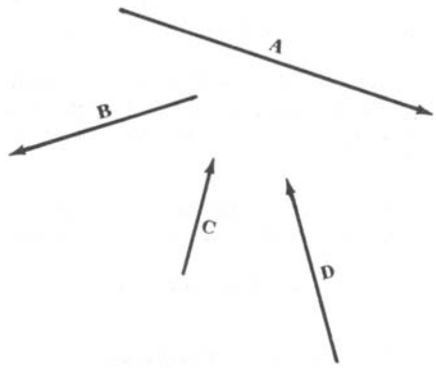


Fig. (*b*)

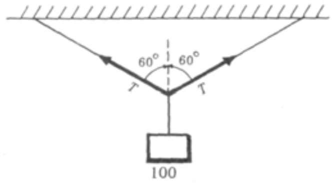
37. Als *A B C D E F* de hoekpunten zijn van een regelmatige zeshoek, bepaal dan de resultante van de krachten voorgesteld door de vectoren **AB**, **AC**, **AD**, **AE** en **AF**. *Antw.:* 3**AD**

38. Als **A** en **B** gegeven vectoren zijn, toon aan dat (*a*) |**A** + **B**| ≤ |**A**| + |**B**|, (*b*) |**A** - **B**| ≥ |**A**| - |**B**|.

39. Toon aan dat |**A** + **B** + **C** | ≤ |**A**| + |**B**| + |**C**|.

40. Twee steden *A* en *B* bevinden zich aan de tegenovergestelde oever van een rivier die 8 km breed is en stroomt aan een snelheid van 4km/u. Een persoon in *A* wenst een stad *C* te bereiken op 6 km van *B*, stroomopwaarts en op dezelfde oever als B. Indien de boot zich aan een snelheid van 10km/h verplaatst, welke koers moet de persoon dan volgen en hoelang zal het traject duren?
Antw.: Hij moet stroomopwaarts varen en een hoek van 34°28' met de oever maken; het duurt 1u 25min.

41. Een persoon verplaatst zich naar het zuiden aan een snelheid van 15km/u en merkt op dat de wind uit het westen schijnt te komen. Als hij zijn snelheid opvoert tot 25km/u, schijnt de wind uit het ZW te komen. Vind de richting en de snelheid van de wind. *Antw.:* De wind heeft een richting van 56° noordwest en een snelheid van 18 km/u.[i]



42. Een gewicht van 100N wordt opgehangen aan het midden van een touw, zodat een hoek van 120° ontstaat tussen de touwen. Bepaal de spanning T uitgeoefend op het touw. *Antw.:* 100N.

43. Vereenvoudig 2A + **B** + 3**C**- {**A** - 2**B** - 2(2**A** - 3**B** - **C**)}.
Antw.: 5**A** - 3**B** + **C**.

44. Als **a** en **b** niet-colineaire vectoren zijn en indien A = $(x + 4y)$**a** + $(2x + y + 1)$**b** en **B** = $(y - 2x + 2)$**a** + $(2x - 3y - 1)$**b**, Bepaal dan x en y zodanig dat 3**A** = 2**B**.
Antw.: $x = 2$, $y = -1$.

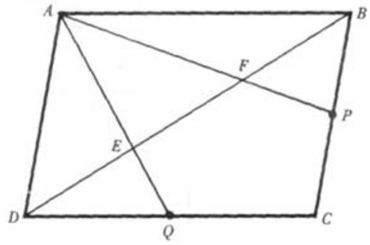
45. De basisvectoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ worden gegeven in functie van de basisvectoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ door de verbanden: $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$, $\mathbf{a}_3 = -2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$.Als $\mathbf{F} = 3\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$, druk dan **F** uit in functie van $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ en $\mathbf{a}_3$.
Antw.: $2\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$.

46. Stel dat **a**, **b**, **c** drie non-coplanaire vectoren zijn, zijn dan de vectoren $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{r}_2 = 3\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, en $\mathbf{r}_3 = 4\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + \mathbf{c}$ lineair onafhankelijk of afhankelijk?
Antw.: Lineair afhankelijk want $\mathbf{r}_3 = 5\mathbf{r}_1 - 2\mathbf{r}_2$.

47. Gegeven de vectoren **A** en **B** die de diagonalen van een parallellogram bepalen, construeer dan dat parallellogrammen.

48. Aantonen dat het lijnstuk dat de middens verbindt van twee zijden van een driehoek evenwijdig is aan de derde zijde en gelijk is aan de helft.

49. (*a*) Als O een willekeurig punt is in de driehoek *ABC* en als *P, Q, R* de middens zijn van de zijden *AB*, *BC*, *CA* respectievelijk, toon dan aan dat **OA** + **OB** + **OC** = **OP** + **OQ** + **OR**.
(b) Is het resultaat ook waar als O een punt is dat buiten de driehoek ligt? Toon het aan.



50. In de tegenoverstaande figuur is *ABCD* een parallellogram waarin *P* en *Q* de middens zijn van de zijden *BC* en *CD* respectievelijk. Toon aan dat *AP* en *AQ* de diagonale *BD* snijden in de punten *E* en *F.*

51. Aantonen dat de zwaartelijnen van een driehoek elkaar in één punt snijden, het zwaartepunt van de driehoek.

52. Aantonen dat de deellijnen van een driehoek elkaar in één punt snijden.

53. Aantonen dat een driehoek bestaat waarvan de zijden gelijk zijn en evenwijdig aan de zwaartelijnen van een willekeurige drihoek

54. Zij **p** en **q** de positievectoren van de punten *P* en *Q* ten opzichte van een oorspring O. Als R een punt is dat het lijnstuk *PQ* verdeelt in een verhouding *m/n* dan de positievector van *R* gegeven wordt door $\mathbf{r} = (m\mathbf{p} + n\mathbf{q})/(m + n)$.

55 Als $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ … $\mathbf{r}_n$ de positievectoren zijn ten opzichte van O van punten met massa's m_1, m_2, … m_n, dan is de positievector van het zwaartepunt gegeven door $\mathbf{r} = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_n\mathbf{r}_n)/(m_1 + \ldots + m_n)$ en deze uitdrukking is onafhankelijk van O. Toon dit aan.

56. Beschouw de vierhoek *ABCD* met hoekpunten A(-1,-2,2), B(3,2,-1), C(1,-2,4) en D(3,1,2) en respectieve massa's 1, 2, 3 en 4. Vind de coördinaten van het zwaartepunt.
Antw.: (2,0,2).

57. Beschouw 3 punten **A**, **B** en **C** niet op een zelfde rechte met positievectoren **a**, **b** en **c** t. o. v. een oorsprong *O*. De positievector **r** van een willekeurig punt *P* van het vlak *ABC* is dan: $\mathbf{r} = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c})/(m + n + p)$ waarbij m, n en p scalairen zijn. Toon dit aan. Toon ook aan dat deze uitdrukking onafhankelijk is van *O*.

58. Bepaal de positievectoren van de punten *P* en *Q* gegeven door $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ en $\mathbf{r}_2 = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Bepaal **PQ** in functie van **i**, **j**, **k** en bepaal zijn lengte. *Antw.:* 2**i** - 6**j** + 3**k**, 7.

59. Als **A** = 3**i** - **j** - 4**k**, **B** = -2**i** + 4**j** -3**k**, **C** = **i** + 2**j** – **k**, bepaal dan (*a*) 2**A** – **B** + 3**C**, (*b*) |**A** + **B** + **C**|, (*c*) |3**A** - 2**B** + 4**C**|, (*d*) een eenheidsvector evenwijdig aan 3**A** - 2**B** + 4**C**.
Antw.: (*a*) 11**i** - 8**k**, (b) √93 (*c*) √398 (d) (3**A** - 2**B** + 4**C**)/√398.

60. De volgende krachten, gemeten in Newton, oefenen zich uit op een deeltje *P:* $\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2 = -5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_3 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_4 = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Bepaal (*a*) de resultante van de krachten (*b*) de lengte van de resultante. *Antw.:* (*a*) 2**i** - **j** (b) √5.

61. Voor elk van de volgende vectoren, welke zijn lineair onafhankelijk en welke lineair afhankelijk: (*a*) **A** = 2**i** + **j** - 3**k**, **B** = **i** - 4**k**, **C** = 4**i** + 3**j** – **k**. (*b*) **A** = **i** - 3**j** + 2**k**, **B** = 2**i** - 4**j** - **k**, **C** = 3**i** + 2**j** – **k**
Antw.: (*a*) lineair afhankelijk, (*b*) lineair onafhankelijk

62. Toon aan dat vier willekeurige vectoren in de driedimensionale ruimte steeds lineair afhankelijk zijn.

63. Aantonen dat een nodige en voldoende voorwaarde opdat de vectoren $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$ lineair onafhankelijk zouden zijn, is dat de determinant $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$ verschillend van nul is.

64. (*a*) Aantonen dat de vectoren **A** = 3**i** + **j** - 2**k**, **B** = -**i** + 3**j** +4**k**, **C** = 4**i** - 2**j** – 6**k** de zijden van een driehoek kunnen vormen. (*b*) Bepaal de lengte van de zwaartelijnen van die driehoek.
Antw.: (*b*) $\sqrt{6}$, $1/2\sqrt{114}$, $1/2\sqrt{150}$.

65. Gegeven het veld van de scalairen gedefinieerd door $\phi(x, y, z) = 4yz^3 + 3xyz - z^2 + 2$. Bepaal (*a*) $\phi(1, -1, -2)$, (*b*) $\phi(0, -3, 1)$.
Antw.: (*a*) 36 (*b*) -11.

66. Stel het volgende vectorveld grafisch voor
(*a*) $\mathbf{V}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$, (*b*) $\mathbf{V}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$, (*c*) $\mathbf{V}(x, y, z) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

---

[i] Opl. Uit w.cosα=15 en w/sin45°=25/sin(180°-45°-α) volgt dat 15tgα+15=25 zodat α=33° en w=18km/u.